I-164　多面楕円体の応力特性について.

室蘭工業大学　正員　能町 純雄
正員　松岡 健一
学生員　○伝藤　隆.

1. まえがき.

薄肉筒体の有力な解析方法として 折板理論がある。本文は折板理論の 折板要素において、
(1). 折板要素の軸方向(長手方向)の曲率変化を考慮し、
(2). 横方向(短方向)の剛性については SLOPE-DEFLECTION EQUATION に相当する式を考慮し、(3). 折板の上縁、下縁での Shear Tractions と Normal Forces については、折板要素を Two-Dimensional Problem の微分方程式を満足するように誘導した式を用い、
(4). 曲げについては、平板の曲げの微分方程式を満たすように誘導した式を用いて、
薄肉多面楕円筒体の応力特性を調べたものである。

2. 帯板の DISPLACEMENT-SHEAR EQUATIONS.

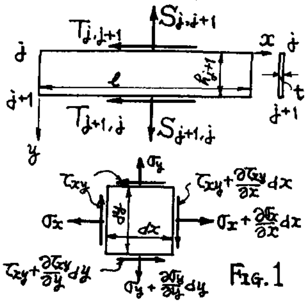

FIG.1 において、2次元問題における、つりあいの微分方程式において

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

また、ϕ : Stress Function とすると、

$$\Delta^2 \phi = 0 \qquad (\Delta : \text{LAPLACIAN})$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

および、上縁、下縁での境界値

j-side　$t\sigma_y = S_{j,j+1}$　, $t\tau_{xy} = T_{j,j+1}$　, $u = u_j$　, $v = v_j$

$j+1$ side　$t\sigma_y = S_{j+1,j}$　, $t\tau_{xy} = T_{j+1,j}$　, $u = u_{j+1}$　, $v = v_{j+1}$

を考慮して、次の Displacement-Shear equations が誘導されている(*)。

$$\dot{T}_{j,j+1} = \frac{Et h_{j+1}}{6}(2\dddot{u}_j + \dddot{u}_{j+1}) + \frac{\nu h_{j+1}}{6}(2\ddot{S}_{j,j+1} + \ddot{S}_{j+1,j}) + \frac{S_{j,j+1} - S_{j+1,j}}{h_{j+1}} \quad \cdots (A)$$

$$\dot{T}_{j+1,j} = \frac{Et h_{j+1}}{6}(2\dddot{u}_{j+1} + \dddot{u}_j) + \frac{\nu h_{j+1}}{6}(2\ddot{S}_{j+1,j} + \ddot{S}_{j,j+1}) + \frac{S_{j+1,j} - S_{j,j+1}}{h_{j+1}} \quad \cdots (B)$$

$$Gt h_{j+1} \ddot{v}_{j,j+1} = S_{j,j+1} - S_{j+1,j} + Gt(\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) - \frac{G h_{j+1}^2}{6E}\left\{(1-\nu^2)(2\ddot{S}_{j,j+1} + \ddot{S}_{j+1,j}) - \nu Et(2\dddot{u}_j + \dddot{u}_{j+1})\right\} \quad \cdots (C)$$

$$Gt h_{j+1} \ddot{v}_{j+1,j} = S_{j,j+1} - S_{j+1,j} + Gt(\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + \frac{G h_{j+1}^2}{6E}\left\{(1-\nu^2)(2\ddot{S}_{j+1,j} + \ddot{S}_{j,j+1}) - \nu Et(2\dddot{u}_{j+1} + \dddot{u}_j)\right\} \quad \cdots (D)$$

ここで ・(Dot)は xの1回偏微分 $\frac{\partial}{\partial x}$ を表わす。

(*) 能町, 松岡, 田島 : 帯板を要素とする応力解析法 ―土木学会北海道支部研究発表論文集 S.44度―

3、平板の曲げの微分方程式を満足する式

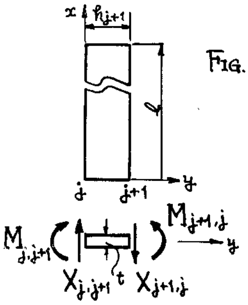

FIG. 2

平板の曲げの微分方程式 $\Delta^2 w = \frac{q}{N}$ $\quad N = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$

を、x方向に指数型Fourier変換し、y方向にFourier sine変換し、

$\eta = \frac{y}{h_{j+1}}$ とすると、

$$w = w_j \cdot f^{(1)}(\eta) + w_{j+1} \cdot f^{(1)}(1-\eta) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_j \frac{h_{j+1}^2}{N} \cdot f^{(3)}(\eta) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big|_{j+1} \frac{h_{j+1}^2}{N} \cdot f^{(3)}(1-\eta)$$

ここで $f^{(1)}(\eta) = 1-\eta \quad f^{(1)}(1-\eta) = \eta$,

$$f^{(3)}(\eta) = \frac{\eta(1-\eta)(2-\eta)}{6}, \quad f^{(3)}(1-\eta) = \frac{\eta(1-\eta^2)}{6}$$

これらの式から、次に示すような諸式が導びかれている。(**)

ただし、Notation ~ は $\tilde{f}_m = \int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx$ を表わす。

$$\tilde{M}_{j,j-1} = -\frac{2N}{h_j} \cdot \left\{ 2\tilde{\theta}_j + \tilde{\theta}_{j-1} - \frac{3}{h_j} (\tilde{w}_{j,j-1} - \tilde{w}_{j-1,j}) \right\} + \nu N \cdot \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \tilde{w}_{j,j-1} \quad \cdots (E)$$

$$\tilde{M}_{j,j+1} = \frac{2N}{h_{j+1}} \left\{ 2\tilde{\theta}_j + \tilde{\theta}_{j+1} - \frac{3}{h_{j+1}} (\tilde{w}_{j+1,j} - \tilde{w}_{j,j+1}) \right\} + \nu N \cdot \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \tilde{w}_{j,j+1} \quad \cdots (F)$$

$$X_{j,j+1} = \frac{M_{j+1,j} - M_{j,j+1}}{h_{j+1}} - \frac{N(1+\nu)}{h_{j+1}} (\ddot{w}_{j+1,j} - \ddot{w}_{j,j+1}) + \frac{h_{j+1}}{6} \left\{ (2\ddot{M}_{j,j+1} + \ddot{M}_{j+1,j}) - N(1-\nu)(2\dddot{w}_{j,j+1} + \dddot{w}_{j+1,j}) \right\} \quad \cdots (G)$$

$$X_{j,j-1} = \frac{M_{j,j-1} - M_{j-1,j}}{h_j} - \frac{N(1+\nu)}{h_j} (\ddot{w}_{j,j-1} - \ddot{w}_{j-1,j}) - \frac{h_j}{6} \left\{ (2\ddot{M}_{j,j-1} + \ddot{M}_{j-1,j}) - N(1-\nu)(2\dddot{w}_{j,j-1} + \dddot{w}_{j-1,j}) \right\} \quad \cdots (H)$$

4. 多面楕円筒体の力のつりあい。

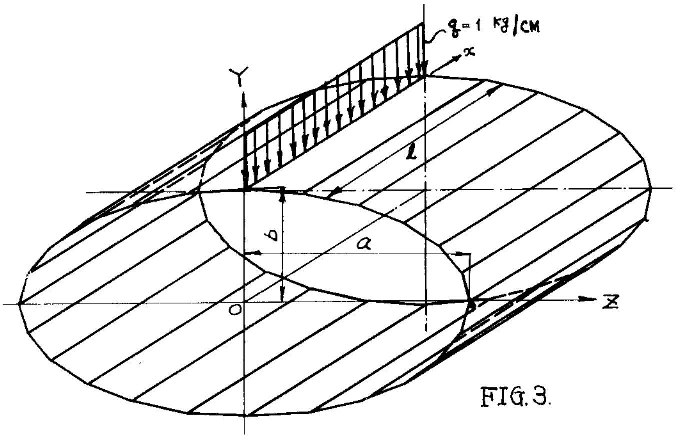

FIG. 3

FIG. 3で $\frac{Z^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$

極座標表示して、$Z = a\cos\Theta$, $Y = b\sin\Theta$

このParametre Θ を一定角度ずつふって座標を決める。

FIG. 4において、j点でのつりあいをとる。

(i) 曲げモーメントのつりあい。

$$\mathfrak{M}_j + M_{j,j-1} - M_{j,j+1} = 0 \quad \cdots (1)$$

(ii) X方向のSHEAR TRACTIONのつりあい。

$$\mathfrak{T}_j + T_{j,j-1} + T_{j,j+1} = 0 \quad \cdots (2)$$

(iii) Z方向の力のつりあい。

$$P_j^Z - S_{j,j-1}\cos\varphi_j + S_{j,j+1}\cos\varphi_{j+1} + X_{j,j-1}\sin\varphi_j - X_{j,j+1}\sin\varphi_{j+1} = 0 \quad \cdots (3)$$

(iv) Y方向の力のつりあい。

$$P_j^Y - S_{j,j-1}\sin\varphi_j + S_{j,j+1}\sin\varphi_{j+1} - X_{j,j-1}\cos\varphi_j + X_{j,j+1}\cos\varphi_{j+1} = 0 \quad \cdots (4)$$

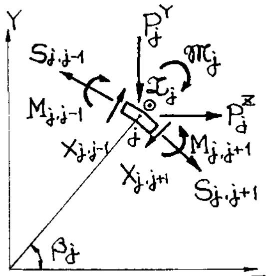

FIG. 4. 力のつりあい

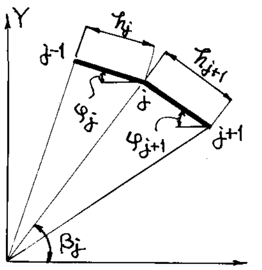

FIG. 5

(**). 能町，松岡，堀米：帯板を要素とする平板の解法について —土木学会第24回学術講演会講演集—

5、変位の座標変換

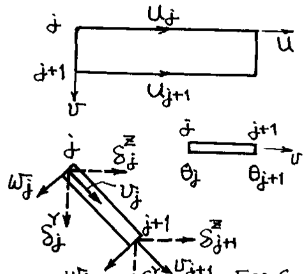

FIG.6

FIG.6.より、

$$v_{j,j-1} = \delta_j^Z \cos\varphi_j + \delta_j^Y \sin\varphi_j$$
$$v_{j,j+1} = \delta_j^Z \cos\varphi_{j+1} + \delta_j^Y \sin\varphi_{j+1}$$
$$w_{j,j-1} = -\delta_j^Z \sin\varphi_j + \delta_j^Y \cos\varphi_j$$
$$w_{j,j+1} = -\delta_j^Z \sin\varphi_{j+1} + \delta_j^Y \cos\varphi_{j+1}$$

なる方向に 変位の座標を変換する。

6．理論式の誘導

(i)、2.の(C),(D)式にFourier sine変換をほどこし、連立に解いて、$\tilde{S}_{j+1,j}$、$\tilde{S}_{j,j+1}$を求める。

(ii)、(G),(H)をFourier sine変換し、(E),(F)を代入して $\tilde{X}_{j,j+1}$, $\tilde{X}_{j,j-1}$を求める。

(iii) (A),(B)をFourier sine変換し、(i)の$\tilde{S}$を代入して $\tilde{T}_{j,j+1}$, $\tilde{T}_{j,j-1}$を求める。

以上の式を(1),(2),(3),(4)をFourier sine変換した式に代入し、5.の座標変換をすると、

$$\frac{\tilde{m}_j}{N} = \frac{2}{h_j}\hat{\theta}_{j-1} + 4\left(\frac{1}{h_j}+\frac{1}{h_{j+1}}\right)\hat{\theta}_j + \frac{2}{h_{j+1}}\hat{\theta}_{j+1} - \frac{6}{h_j^2}\sin\varphi_j\cdot\tilde{\delta}_{j-1}^Z + 6\left[\frac{\mu_j}{h_j^2}\sin\varphi_j - \frac{\mu_{j+1}}{h_{j+1}^2}\sin\varphi_{j+1}\right]\cdot\tilde{\delta}_j^Z$$
$$+ \frac{6}{h_{j+1}^2}\sin\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Z + \frac{6}{h_j^2}\cos\varphi_j\cdot\tilde{\delta}_{j-1}^Y + 6\left[-\frac{\mu_j}{h_j^2}\cos\varphi_j + \frac{\mu_{j+1}}{h_{j+1}^2}\cos\varphi_{j+1}\right]\tilde{\delta}_j^Y$$
$$- \frac{6}{h_{j+1}^2}\cos\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Y \quad \cdots\cdots (1)'$$

$$\frac{\tilde{\Sigma}_j}{\frac{12N}{t^2}} = -\frac{\zeta_j\Delta_j}{h_j}\hat{u}_{j-1} - \left(\frac{\xi_{j+1}\Delta_{j+1}}{h_{j+1}} + \frac{\xi_j\Delta_j}{h_j}\right)\hat{u}_j - \frac{\zeta_{j+1}\Delta_{j+1}}{h_{j+1}}\hat{u}_{j+1} - \frac{1+\nu}{4}\left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\Delta_j\cos\varphi_j\cdot\tilde{\delta}_{j-1}^Z$$
$$+ \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\left\{\Delta_j\chi_j\cos\varphi_j - \Delta_{j+1}\chi_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\right\}\tilde{\delta}_j^Z + \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\frac{1+\nu}{4}\Delta_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Z - \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\frac{1+\nu}{4}\Delta_j\sin\varphi_j\,\tilde{\delta}_{j-1}^Y$$
$$+ \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\left\{\Delta_j\chi_j\sin\varphi_j - \Delta_{j+1}\chi_{j+1}\sin\varphi_{j+1}\right\}\cdot\tilde{\delta}_j^Y + \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2\frac{1+\nu}{4}\Delta_{j+1}\sin\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Y \quad \cdots\cdots (2)'$$

$$\frac{\tilde{P}_j^Z}{N} = \frac{6}{h_j^2}\sin\varphi_j\cdot\hat{\theta}_{j-1} + 6\left\{\frac{\mu_j}{h_j^2}\sin\varphi_j - \frac{\mu_{j+1}}{h_{j+1}^2}\sin\varphi_{j+1}\right\}\hat{\theta}_j - \frac{6}{h_{j+1}^2}\sin\varphi_{j+1}\cdot\hat{\theta}_{j+1} + \frac{3(1+\nu)}{t^2}\Delta_j\cos\varphi_j\cdot\hat{u}_{j-1}$$
$$+ \frac{12}{t^2}\left\{\gamma_j\cos\varphi_j - \gamma_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\right\}\hat{u}_j - \frac{3(1+\nu)}{t^2}\Delta_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\cdot\hat{u}_{j+1} - \frac{12}{h_j}\left\{\frac{\alpha_j}{t^2}\cos^2\varphi_j + \frac{\varepsilon_j}{h_j^2}\sin^2\varphi_j\right\}\tilde{\delta}_{j-1}^Z$$
$$+ 12\left[\frac{1}{h_j}\left(\frac{\Phi_j\sin^2\varphi_j}{h_j^2} - \frac{\beta_j\cos^2\varphi_j}{t^2}\right) + \frac{1}{h_{j+1}}\left(\frac{\Phi_{j+1}\sin^2\varphi_{j+1}}{h_{j+1}^2} - \frac{\beta_{j+1}\cos^2\varphi_{j+1}}{t^2}\right)\right]\tilde{\delta}_j^Z$$
$$- \frac{12}{h_{j+1}}\left\{\frac{\alpha_{j+1}\cos^2\varphi_{j+1}}{t^2} + \frac{\varepsilon_{j+1}\sin^2\varphi_{j+1}}{h_{j+1}^2}\right\}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Z + \frac{12}{h_j}\left(\frac{\varepsilon_j}{h_j^2} - \frac{\alpha_j}{t^2}\right)\cdot\cos\varphi_j\sin\varphi_j\cdot\tilde{\delta}_{j-1}^Y$$
$$- 12\left[\frac{1}{h_j}\left(\frac{\Phi_j}{h_j^2} + \frac{\beta_j}{t^2}\right)\sin\varphi_j\cos\varphi_j + \frac{1}{h_{j+1}}\left(\frac{\Phi_{j+1}}{h_{j+1}^2} + \frac{\beta_{j+1}}{t^2}\right)\sin\varphi_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\right]\tilde{\delta}_j^Y + \frac{12}{h_{j+1}}\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{h_{j+1}^2} - \frac{\alpha_{j+1}}{t^2}\right)\sin\varphi_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Y$$
$$\cdots\cdots (3)'$$

$$\frac{\tilde{P}_j^Y}{N} = -\frac{6}{h_j^2}\cos\varphi_j\,\hat{\theta}_{j-1} + 6\left\{\frac{\mu_{j+1}}{h_{j+1}^2}\cos\varphi_{j+1} - \frac{\mu_j}{h_j^2}\cos\varphi_j\right\}\cdot\hat{\theta}_j + \frac{6}{h_{j+1}^2}\cos\varphi_{j+1}\,\hat{\theta}_{j+1} + \frac{3(1+\nu)}{t^2}\Delta_j\sin\varphi_j\cdot\hat{u}_{j-1}$$
$$+ \frac{12}{t^2}\left(\gamma_j\sin\varphi_j - \gamma_{j+1}\sin\varphi_{j+1}\right)\cdot\hat{u}_j - \frac{3(1+\nu)}{t^2}\Delta_{j+1}\sin\varphi_{j+1}\cdot\hat{u}_{j+1} - \frac{12}{h_j}\left(\frac{\varepsilon_j}{h_j^2} - \frac{\alpha_j}{t^2}\right)\sin\varphi_j\cos\varphi_j\cdot\tilde{\delta}_{j-1}^Z$$
$$- 12\left[\frac{\sin\varphi_j\cos\varphi_j}{h_j}\left(\frac{\beta_j}{t^2} + \frac{\Phi_j}{h_j^2}\right) + \frac{\sin\varphi_{j+1}\cos\varphi_{j+1}}{h_{j+1}}\left(\frac{\beta_{j+1}}{t^2} + \frac{\Phi_{j+1}}{h_{j+1}^2}\right)\right]\tilde{\delta}_j^Z + \frac{12}{h_{j+1}}\left(\frac{\varepsilon_{j+1}}{h_{j+1}^2} - \frac{\alpha_{j+1}}{t^2}\right)\sin\varphi_{j+1}\cos\varphi_{j+1}\cdot\tilde{\delta}_{j+1}^Z$$

$$-\frac{12}{h_j}\left(\frac{\alpha_j}{t^2}\sin^2\varphi_j+\frac{\varepsilon_j}{h_j^2}\cos^2\varphi_j\right)\cdot\tilde{\delta}^Y_{j-1}-12\cdot\Big[-\frac{1}{h_j}\left(\frac{\beta_j}{t^2}\sin^2\varphi_j-\frac{\Phi_j}{h_j^2}\cos^2\varphi_j\right)+\frac{1}{h_{j+1}}\Big(\frac{\beta_{j+1}}{t^2}\sin^2\varphi_{j+1}$$

$$-\frac{\Phi_{j+1}}{h_{j+1}^2}\cos^2\varphi_{j+1}\Big)\Big]\cdot\tilde{\delta}^Y_j-\frac{12}{h_{j+1}}\left(\frac{\alpha_{j+1}}{t^2}\sin^2\varphi_{j+1}+\frac{\varepsilon_{j+1}}{h_{j+1}^2}\cos^2\varphi_{j+1}\right)\cdot\tilde{\delta}^Y_{j+1} \qquad \cdots\cdots (4)'$$

(1)', (2)', (3)', (4)' から各j点におけるつりあい式を求め連立方程式を解き、Fourier sine 変換の逆変換

$$\theta_j=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\theta}_j\sin\frac{m\pi x}{l},\quad u_j=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{u}_j\sin\frac{m\pi x}{l},\quad \delta^Z_j=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\delta}^Z_j\sin\frac{m\pi x}{l},\quad \delta^Y_j=\frac{2}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\delta}^Y_j\sin\frac{m\pi x}{l}$$

をほどこし、各j点での Bending Moment, x方向の $\sigma_{x_j}=E\dot{u}_j$ を求める。

尚、上式中 $\alpha_j=\left\{1-\frac{(1-\nu)h_j^2}{12}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}\cdot\Delta_j$, $\beta_j=\left\{-1-\frac{(1-\nu)}{6}h_j^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}\cdot\Delta_j$, $\gamma_j=-\left\{\frac{1-3\nu}{4}-\frac{\nu(1-\nu)}{24}h_j^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right\}\cdot\Delta_j$

$\Phi_j=1+\frac{1+\nu}{6}h_j^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\frac{h_j^4}{36}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$, $\varepsilon_j=1+\frac{1+\nu}{6}h_j^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\frac{h_j^4}{72}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$, $\mu_j=1+\frac{h_j^2}{6}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$

$\zeta_j=\frac{1-\nu}{2}-\frac{2+\nu}{12}h_j^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\frac{(1-\nu)h_j^4}{144}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$, $\xi_j=-\frac{1-\nu}{2}-\frac{(4-\nu)h_j^2}{12}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2-\frac{(1-\nu)h_j^4}{72}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4$,

$\chi_j=-\frac{1-3\nu}{4}+\frac{\nu(1-\nu)}{24}h_{j+1}^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$, $\Delta_j=1\Big/1+\frac{1-\nu}{24}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2h_j^2$ である。

7. 数値計算

FIG. 3. にあるような荷重で 使用数値は、$E=2100000\ \mathrm{kg/cm^2}$, $t=0.5^{\mathrm{cm}}$, $a=10^{\mathrm{cm}}$, $b=5^{\mathrm{cm}}$, $\nu=0.3$
$m=1,3,5,9$ $j=0\sim23$, $\Theta=15°$, $l=100^{\mathrm{CM}}$ 。FIG. 7, 8 に計算結果を示す。

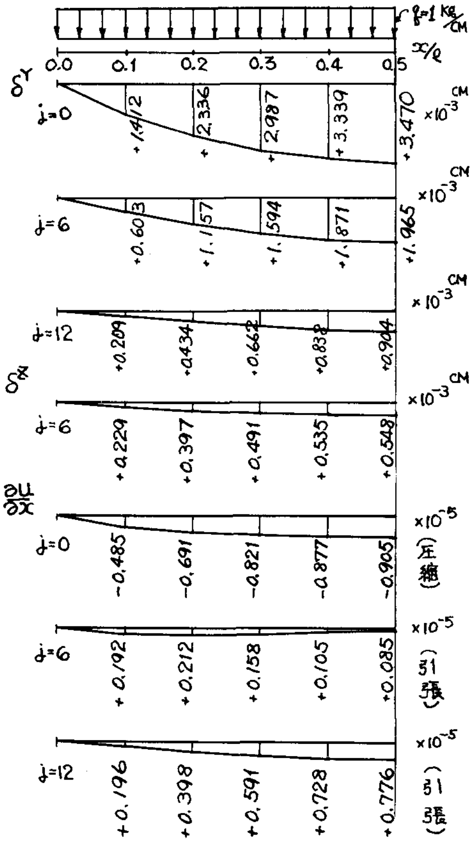

FIG. 8 各点における変位(δ^Z, δ^Y), 歪($\dot{u}$)の x方向(長手方向)の変化のようす

8. あとがき

文献(***)に 正多面筒体の応力解析があり、折板の分割の極限において、そのつりあい式が Timoshenko の微分方程式に一致することが確かめられており、この論文では、接角のつりあいを捨て、Bending Moment のつりあい式を用い、楕円筒体と、正多面筒体の Topological 一致を考えるための 1 step として、まとめたものである。数値計算には、北大大型計算機センターの FACOM 230-60 FORTRAN を用いた。

— 参考文献(***) —

能町、松岡、田島：多面構殻の応力解析について，土木学会第25回年次学術講演会講演集

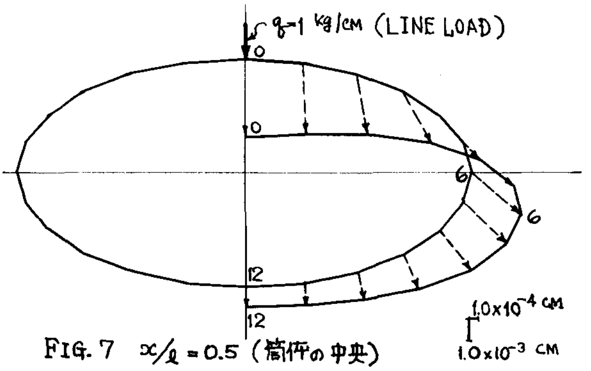

FIG. 7 $x/l=0.5$ (筒体の中央)での DISPLACEMENT(δ^Z, δ^Y)