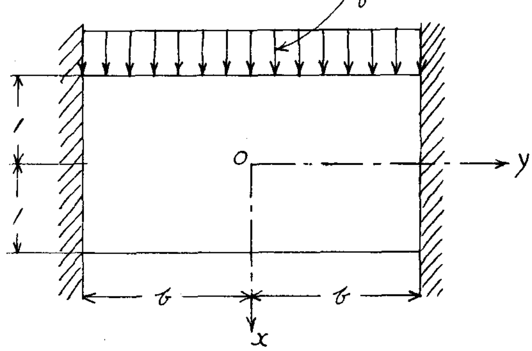
I-162 固有関数法による板の面内応力解析

信州大学 学生員 ○島田俊樹
〃 正 員 谷本勉之助 夏目正太郎

1. はじめに

本論文は，面内矩形板の曲げ問題を取扱っている。解析方法としては，演算子法の思想を固有関数法に応用し，それは Neumann 級数に展開されるであろう。然るに，境界条件の処理に際して近似がはいり込まない。ここでは下図のような支持状態の矩形板が上端に等分布荷重を受けている場合を解析する。もちろん，支持状態は不安定とならないかぎり，自由な任意の組合せを採り得る。



2. 解析

上図に示す矩形板の境界条件は，$y=\pm b$ で固定，$x=1$ で自由，$x=-1$ で強度 q の等分布荷重を受けている。上記の条件を満足する Airy の応力関数は次式で表わされる。

$$\chi=\sum \frac{b^2}{\lambda^2}\left[\cos\lambda\eta,\ \lambda\eta\sin\lambda\eta\right]\mathbf{N}\left\{ch\frac{\lambda}{b}x,\ sh\frac{\lambda}{b}x\right\}+\frac{q}{40}\left[x^5-5b^2\eta^2(x^3-3x+2)\right]$$

ここで，λ は $y=\pm b$ での境界条件を処理して得られた固有値であって，$2\lambda-\frac{3-\nu}{1+\nu}\sin 2\lambda=0$ を満足するものであり，$\sum$ は λ に関しての和を示している。例によって状態ベクトル $\mathbf{W}(x,y)$ を定義する。すなわち，

$$\mathbf{W}(x,y)=\left\{u,\ v,\ \sigma_x,\ \tau_{xy}\right\}=\sum_n \mathbf{Y}_n(y)\cdot\mathbf{X}_n(x)\mathbf{C}_n+\mathbf{W}_p(x,y)$$

固有値

$$2\lambda_1=4.350371+1.487484i$$
$$2\lambda_2=5.049261-1.640167i$$
$$2\lambda_3=10.77337+2.393668i$$
$$2\lambda_4=11.21247-2.433062i$$
$$2\lambda_5=17.11262+2.850343i$$
$$2\lambda_6=23.42734+3.161196i$$

固有函数 $\mathbf{Y}_n(y)$ を Neumann展開を用いて，Legendreの多項式に展開すると，

$$\mathbf{Y}_n(y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\eta)\,\boldsymbol{a}_{mn}$$

ここで $P_m(\eta)$ は m次の Legendreの函数を表わしている。また，複素量の固有マトリクス $\mathbf{C}_n$ を，$\mathbf{C}_n = \boldsymbol{i}\,\mathbf{F}_n$ なる変換を施して，実数の固有マトリクス $\mathbf{F}_n$ を用いれば，状態ベクトル $\mathbf{W}(x,y)$ を Neumann展開した形の次式を得る。

$$\mathbf{W}(x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(\eta)\left[\lfloor \mathbf{A}_{mn} \rfloor_x \{\mathbf{F}_n\} + \boldsymbol{f}_m\right], \quad \mathbf{A}_{mn,x} = \boldsymbol{a}_{mn}\cdot \mathbf{X}_n(x)\,\boldsymbol{i}$$

係数マトリクス $\mathbf{A}_{mn,x}$ は 4－4 であり，各々の要素は複素量である。また，$\mathbf{F}_n$ は 4－1 の実数のマトリクスである。もし，Fourier展開を用いれば，その収束性の悪さの為に電子計算機に計算させる際に誤差集積は大となるであろう。

次に残った境界条件を処理する為に選択マトリクス $\mathbf{S}$ を用いて次式を得，4つの未知の実数を要素とする $\mathbf{F}_n$ は決定されるのである。すなわち，

$$\mathbf{S}\lfloor \mathbf{A}_{mn} \rfloor_{-1}\{\mathbf{F}_n\} + \mathbf{S}\boldsymbol{f}_{m,-1} + \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \mathbf{S}\lfloor \mathbf{A}_{mn} \rfloor_{1}\{\mathbf{F}_n\} + \mathbf{S}\boldsymbol{f}_{m,1} = 0$$

$\mathbf{B} = \mathbf{S}\lfloor \mathbf{A}_{mn} \rfloor_{-1}$ ，$\mathbf{B}' = \mathbf{S}\lfloor \mathbf{A}_{mn} \rfloor_{1}$ とおいて $\mathbf{F}_n$ を決定するのは演算子法の常套手段である。

$$\{\mathbf{F}_n\} = -\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix}^{-1}\left[\begin{bmatrix} \mathbf{S}\boldsymbol{f}_{m,-1} \\ \mathbf{S}\boldsymbol{f}_{m,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q\right]$$

最終的に，一般化された変位 $\mathbf{U}$，一般化された力 $\mathbf{V}$ は以下のように表わされる。

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = Re\sum_n \frac{(1+\nu)b}{E\lambda}\begin{bmatrix} -\cos\lambda\eta, & \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda\eta - \lambda\eta\sin\lambda\eta \\ \sin\lambda\eta, & \frac{1-\nu}{1+\nu}\sin\lambda\eta - \lambda\eta\cos\lambda\eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda - \lambda\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} sh\frac{\lambda}{b}x, & ch\frac{\lambda}{b}x \\ ch\frac{\lambda}{b}x, & sh\frac{\lambda}{b}x \end{bmatrix}\boldsymbol{i}\,\mathbf{F}_n + \frac{q}{E}\begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left\{-\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 4x - \nu(x^4 - 3x^2y^2)\right\} + \frac{1}{16}\left\{y^4 - 6(\nu+2)y^2\right\} + \frac{\delta E}{q} \\ \frac{1}{4}\left\{2x^3y - xy^3 + \nu(x^3 - 3x + 2)y\right\} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = Re\sum_n \begin{bmatrix} -\cos\lambda\eta, & 2\cos\lambda\eta - \lambda\eta\sin\lambda\eta \\ \cos\lambda\eta, & \lambda\eta\sin\lambda\eta \\ \sin\lambda\eta, & -\sin\lambda\eta - \lambda\eta\cos\lambda\eta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda - \lambda\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} ch\frac{\lambda}{b}x, & sh\frac{\lambda}{b}x \\ ch\frac{\lambda}{b}x, & sh\frac{\lambda}{b}x \\ sh\frac{\lambda}{b}x, & ch\frac{\lambda}{b}x \end{bmatrix}\boldsymbol{i}\,\mathbf{F}_n + q\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(x^3 - 3x + 2) \\ x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}y^2\right) \\ \frac{3}{4}y(x^2 - 1) \end{bmatrix}, \qquad \delta = \frac{q}{16E}\left\{6(\nu+2)b^2 - b^4\right\}$$