

I-161 固有函数法 固有値総括

信州大学 学生・中原実 正員 石川清志

正員 谷本勉 夏目正太郎

1. はじめに

固有函数法は変数を複素量と考え未定積分定数を増加し、任意境界条件を取り込む解析法で幅広い展開がなされ種々の解法がなされてきた。そしてこれまで演算子法・固有函数法は板の曲げ解析、板の平面応力問題においてその利点つまり境界条件の任意性、収束の精度の良さを生かし検討してきた。この固有函数法の解析を進める上で一つの要となるのが固有値方程式の導出およびその複素根を求めることである。ここで今まで扱った系の固有値をまとめて報告する。

2. 固有値方程式

板の曲げ解析における各種の境界条件に關する固有値方程式は次のようになる。

表-1 固有値方程式

	Clamped	Simple	Free
Clamped	$\sin 2\lambda + 2\lambda = 0, \sin 2\lambda' - 2\lambda' = 0$	$\sin 4\lambda - 4\lambda = 0$	$m \sin^2 2\lambda + (2\lambda)^2 - (2k)^2 = 0$
Simple	$\sin 4\lambda - 4\lambda = 0$	$\sin 2\lambda = 0$	$m \sin 4\lambda + 4\lambda = 0$
Free	$m \sin^2 2\lambda + (2\lambda)^2 - (2k)^2 = 0$	$m \sin 4\lambda + 4\lambda = 0$	$m \sin 2\lambda + 2\lambda = 0, m \sin 2\lambda - 2\lambda = 0$

$$v; \text{ホップソング}, k = \frac{Z}{1-\nu}, m = \frac{3+\nu}{1-\nu}.$$

3. 固有値方程式の導出

今四辺固定端の場合図-1と考える。

板の曲げ微分方程式

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (1)$$

の一般解を次のように考える。

$$w_n = \sum [\cos \lambda p, \lambda p \sin \lambda p] \cosh \frac{\lambda}{a} y, \quad (2)$$

$$p = \frac{x}{a}, \quad \cosh; \text{未定積分定数}.$$

この系の境界条件は

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}_{p=-1} = 0, \quad \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix}_{p=1} = 0. \quad (3)$$

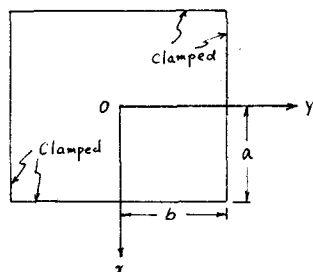


図-1 系

式(3a)に式(2)を代入すれば

$$\begin{bmatrix} \cos \lambda, & \lambda \sin \lambda \\ -\sin \lambda, & \sin \lambda + \lambda \cos \lambda \end{bmatrix} \cosh = 0. \quad (4)$$

よ、て次の固有値方程式を得る。

$$2\lambda + \sin 2\lambda = 0. \quad (5)$$

4.固有値

以下複素根 $\alpha + i\beta$ の結果をあげる。

$$\sin P + P = 0$$

$$P = \alpha + i\beta$$

$$m \sin P - P = 0$$

$$\alpha_1 = 4.212 \ 392 \ 230 \ 5$$

$$\beta_1 = 2.250 \ 728 \ 611 \ 6$$

$$\alpha_1 = 7.677 \ 735 \ 687 \ 7$$

$$\beta_1 = 1.089 \ 234 \ 943 \ 7$$

$$\alpha_2 = 10.712 \ 537 \ 397 \ 3$$

$$\beta_2 = 3.103 \ 148 \ 745 \ 8$$

$$\alpha_2 = 14.004 \ 509 \ 345 \ 7$$

$$\beta_2 = 1.761 \ 680 \ 741 \ 5$$

$$\alpha_3 = 17.073 \ 364 \ 853 \ 2$$

$$\beta_3 = 3.551 \ 087 \ 347 \ 0$$

$$\alpha_3 = 20.312 \ 192 \ 850 \ 5$$

$$\beta_3 = 2.146 \ 048 \ 226 \ 7$$

$$\alpha_4 = 23.398 \ 355 \ 225 \ 7$$

$$\beta_4 = 3.858 \ 808 \ 993 \ 1$$

$$\alpha_4 = 26.611 \ 401 \ 662 \ 3$$

$$\beta_4 = 2.420 \ 268 \ 307 \ 9$$

$$\alpha_5 = 29.708 \ 119 \ 825 \ 3$$

$$\beta_5 = 4.093 \ 704 \ 924 \ 8$$

$$\alpha_5 = 32.906 \ 013 \ 495 \ 8$$

$$\beta_5 = 2.634 \ 328 \ 428 \ 1$$

$$\alpha_6 = 36.009 \ 866 \ 016 \ 4$$

$$\beta_6 = 4.283 \ 781 \ 587 \ 8$$

$$\alpha_6 = 39.197 \ 820 \ 258 \ 9$$

$$\beta_6 = 2.810 \ 154 \ 522 \ 8$$

$$\alpha_7 = 42.306 \ 826 \ 717 \ 6$$

$$\beta_7 = 4.443 \ 445 \ 830 \ 3$$

$$\alpha_7 = 45.487 \ 775 \ 601 \ 2$$

$$\beta_7 = 2.987 \ 443 \ 537 \ 4$$

$$\alpha_8 = 48.600 \ 684 \ 124 \ 1$$

$$\beta_8 = 4.581 \ 104 \ 573 \ 5$$

$$\alpha_8 = 51.776 \ 438 \ 046 \ 8$$

$$\beta_8 = 3.089 \ 204 \ 900 \ 8$$

$$\sin P - P = 0$$

$$m \sin^2 2\lambda + (2\lambda)^2 - (2\kappa)^2 = 0$$

$$\alpha_1 = 7.497 \ 676 \ 277 \ 8$$

$$\beta_1 = 2.768 \ 678 \ 283 \ 0$$

$$\alpha_1 = 1.013 \ 612 \ 863 \ 7$$

$$\beta_1 = 0.178 \ 267 \ 201 \ 5$$

$$\alpha_2 = 13.899 \ 959 \ 714 \ 0$$

$$\beta_2 = 3.352 \ 209 \ 884 \ 9$$

$$\alpha_2 = 2.981 \ 911 \ 218 \ 2$$

$$\beta_2 = 0.837 \ 082 \ 737 \ 2$$

$$\alpha_3 = 20.238 \ 517 \ 707 \ 8$$

$$\beta_3 = 3.716 \ 767 \ 679 \ 8$$

$$\alpha_3 = 4.590 \ 661 \ 837 \ 4$$

$$\beta_3 = 1.065 \ 602 \ 775 \ 9$$

$$\alpha_4 = 26.554 \ 547 \ 265 \ 5$$

$$\beta_4 = 3.983 \ 141 \ 640 \ 3$$

$$\alpha_4 = 6.182 \ 385 \ 515 \ 8$$

$$\beta_4 = 1.217 \ 270 \ 078 \ 9$$

$$\alpha_5 = 32.859 \ 741 \ 005 \ 1$$

$$\beta_5 = 4.193 \ 251 \ 470 \ 4$$

$$\alpha_5 = 7.767 \ 058 \ 513 \ 0$$

$$\beta_5 = 1.332 \ 123 \ 763 \ 3$$

$$\alpha_6 = 39.158 \ 816 \ 520 \ 1$$

$$\beta_6 = 4.366 \ 795 \ 117 \ 7$$

$$\alpha_6 = 9.347 \ 914 \ 788 \ 7$$

$$\beta_6 = 1.424 \ 913 \ 086 \ 0$$

$$\alpha_7 = 45.454 \ 071 \ 464 \ 4$$

$$\beta_7 = 4.514 \ 640 \ 449 \ 5$$

$$\alpha_7 = 10.926 \ 414 \ 524 \ 4$$

$$\beta_7 = 1.502 \ 886 \ 060 \ 1$$

$$\alpha_8 = 51.746 \ 768 \ 302 \ 8$$

$$\beta_8 = 4.643 \ 427 \ 957 \ 1$$

$$\alpha_8 = 12.503 \ 336 \ 527 \ 3$$

$$\beta_8 = 1.570 \ 183 \ 288 \ 9$$

$$m \sin P + P = 0$$

$$\alpha_1 = 10.844 \ 779 \ 805 \ 4$$

$$\beta_1 = 1.487 \ 897 \ 856 \ 4$$

以上各固有値を8項まで書きあげたが実際に使用

$$\alpha_2 = 17.159 \ 809 \ 325 \ 3$$

$$\beta_2 = 1.973 \ 066 \ 203 \ 3$$

されるのは3項をいれ4項までである。9項以下も

$$\alpha_3 = 23.462 \ 539 \ 996 \ 7$$

$$\beta_3 = 2.292 \ 756 \ 844 \ 9$$

同様に求められる。

$$\alpha_4 = 29.259 \ 142 \ 264 \ 2$$

$$\beta_4 = 2.533 \ 101 \ 161 \ 7$$

$$\alpha_5 = 36.052 \ 195 \ 344 \ 5$$

$$\beta_5 = 2.726 \ 140 \ 111 \ 3$$

$$\alpha_6 = 42.342 \ 988 \ 074 \ 8$$

$$\beta_6 = 2.887 \ 602 \ 087 \ 4$$

$$\alpha_7 = 48.622 \ 242 \ 983 \ 1$$

$$\beta_7 = 3.026 \ 439 \ 030 \ 3$$

$$\alpha_8 = 54.920 \ 799 \ 341 \ 3$$

$$\beta_8 = 3.148 \ 245 \ 989 \ 2$$

参考文献

小川泰造, 河原勇, 谷本晃之助, 眞目正太郎 “固有函数法による板の曲げ解析” 中部支部研究発表会講演概要集 (1970年2月) および 25回年次学術講演会講演集。