

I-159 フラットスラブの3次元弾性解析

(3次元, 2次元, および1次元構造要素の結合体としての1体的解析)

大阪工業大学

正員 岡村宏一

大阪設計コンサルタント KK

正員 O島田 功

1 概要; 図-1に示すような, フラットスラブの板と柱の適合問題に関し, 従来の研究例では, 柱頭部に等分布の反力を仮定して支持条件を与えるとか, 柱頭の境界を固定とみなすなどの取扱いがみられる。しかし, このような近似的な解析によって, この部分の応力の流れを正しく評価できるかどうかは疑問である。すなわち, この部分は結局, 3次元非軸対称の問題として扱われねばならないであろう。

筆者は, すでに板の下面に, 垂直ならびに水平方向の分布力を与え, 他の構造要素と結合させる解法とその精度について報告し¹⁾, また, いはゆる"Integral method"によって, 半無限弾性体の内部にかくらんを生ずる調整力の分布を与え, たとえば, Oliveira²⁾が2次元問題に試みたような, singularityの問題を回避しつつ, 仕様の境界を作り出す手法を3次元問題に拡張する方法について報告した³⁾。本文では, これらの解法を組み合わせて, 前述のフラットスラブの3次元解析を行う方法について述べる。

図-2にみるように, フラットスラブは3つの構造要素に分解され, それぞれ, 次元の異なる解法で処理されたのち, 接合面で合成される。柱頭部とスラブとの合成条件は, 合成面に採った選点で成立させ, 3次元体としての柱頭部の表面の境界条件と選点法によって満たされる。また, 構造要素の内部では連続解が与えられている。

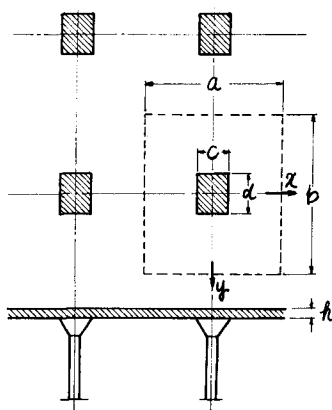


図-1

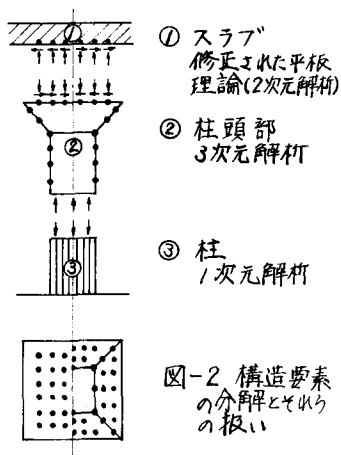


図-2 構造要素の分解とそれらの扱い

2 解法

(1) スラブの解法; (修正された平板理論; 2次元解析)

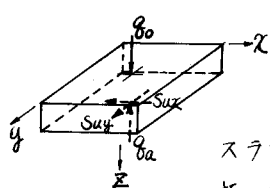


図-3

スラブは外力として図-3に示すように表面荷重 q_0 , 下面に作用する鉛直力 q_u , 水平力 S_{ux} , S_{uy} を受ける。

スラブに対しては, 平面保持の仮定を容認し, 板の曲げ, およびシェイプ理論を適用する。ただし, 薄板理論では, 梁方向 (2方向) の直応力 σ_z の影響を無視しているが, ここでは,

- 1) 岡村 他; 構造物の1つの弾性立体解析法とその系統的応用 土木学会論文報告集 1970 vol. 190, P.61
- 2) Oliveira E.R.A. Plane stress analysis by a general integral method, Proc. of A.S.C.E. EM. 1. 1968,
- 3) 岡村; 3次元弾性非軸対称問題の解法, 土木学会関西支部 (46, 5)

柱頭部の反力が部分的にかなり大きくなることを考慮して、3次元解析を行なう柱頭部との応力の連続性をより正確にするために、 δz の干渉を近似的に考慮する。

さて、Reissner の解法⁴⁾に見るように、平面保持の仮定のもとにわいても、 δz の変化は g_0 と g_u の間で3次曲線で表はされるが、解析がかなり複雑になるので、ここでは図-4に示すように、スラブ厚の範囲で δz は直線分布として略述した。また、Srinivas らが指摘したように、薄板理論、およびReissnerの理論による解析値の差異が辺長に対する板厚比が0.15程度の板ではあまり大きくならないことを考慮して、スラブに対する実用的な仮定として、せん断変形、ならびに、たわみの板厚方向の変化を無視した。

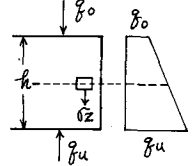


図-4

そこで、スラブの x, y 各方向のひずみ、および応力成分の間には

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\delta x - \nu \delta y - \nu \delta z), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\delta y - \nu \delta x - \nu \delta z), \quad \tau_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{また、前述の仮定により、} \quad \delta z = -\frac{1}{2} (g_0 + g_u) + \frac{g_0 - g_u}{h} z \quad \text{----- (2)}$$

これらよりスラブの断面力を求めると

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2 \nu}{12(1-\nu)} (g_0 - g_u), \\ M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2 \nu}{12(1-\nu)} (g_0 - g_u), \quad M_{xy} = D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (3)}$$

釣合式はつぎのように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} D(\Delta \Delta W) &= g_0 - g_u - \frac{h}{2} \left(\frac{\partial S_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial S_{uy}}{\partial y} \right) - \frac{h^2 \nu}{12(1-\nu)} \Delta g \\ \Delta g &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (g_0 - g_u) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

つぎに、スラブの平面応力について、応力関数 ϕ を導入して、

$$\delta x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \int S_{ux} dx, \quad \delta y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \int S_{uy} dy, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad \text{----- (5)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{適合条件式は、} \quad \Delta \Delta \phi &= -\frac{1}{h} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int S_{ux} dx + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int S_{uy} dy - \nu \left(\frac{\partial S_{ux}}{\partial x} + \frac{\partial S_{uy}}{\partial y} \right) \right\} - \frac{\nu}{2} \Delta g' \\ \Delta g' &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (g_0 + g_u) \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

今、図-1のような、無限領域のフラットスラブを考へ、対称性を考慮して変形、ならびに、それだけの作用力を以下のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \sum_m \sum_n L_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad g_u = \sum_m \sum_n L_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad S_{ux} = \sum_m \sum_n T_{mn} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \\ S_{uy} &= \sum_m \sum_n T_{mn} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad W = \sum_m \sum_n W_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad \phi = \sum_m \sum_n \Phi_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \\ \Delta g &= \sum_m \sum_n K_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad \Delta g' = \sum_m \sum_n K'_{mn} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (7)}$$

(7)を、(4)、(6)に代入して解の形が定まる。(7)の各式における係数は、すでに、文献1)で用いたのと同じ

4) Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates
J. Appl. Mechanics, June 1945

5) Srinivas S, Ras C.V.J. Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, Z.A.M.M Heft 8. 1969

様の方法により、合成面を比較的小さい有限領域(i)に分割し、それぞれ領域においては、不静定力は等分布であるとみなし近似分布を採る。さらに、 σ_z の影響を表わす物理量 $\Delta g_i, \Delta g'_i$ 、 Δg_i はこれらの有限領域においては、それぞれ平均値 $\Delta g_i, \Delta g'_i$ を持つものとみなす。式(4)に見るように、これらは、2次微分の形を持つが、この部分は差分法によって表現する。すなわち、図-6に示すネットを用いて、 i 点とその周囲の9個の点の Δg_i 、あるいは $\Delta g'_i$ を含む1次式となる。もし g_0 が等分布荷重ならば、 g_i の1次式となる。

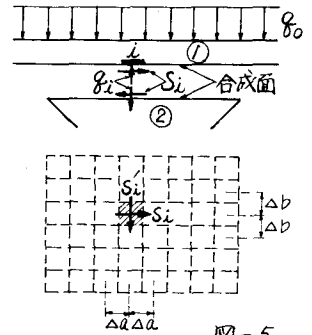


図-5

このような近似分布を考慮することによって、式(7)の各係数が定まり、スラブの解はつぎの形に得られる。

$$\left. \begin{aligned} W &= g_0 \cdot E_0 + \sum_i (g_i \cdot F_i + S_i \cdot G_i + S'_i \cdot G'_i) \\ \phi &= \sum_i (g_i \cdot F_i + S_i \cdot H_i + S'_i \cdot H'_i) \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

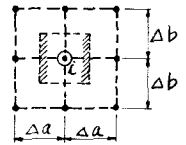


図-6

E, F, G, H は有限領域の位置と大きさに支配される影響係数であって、2重級数の形を持つが、変位、断面力とも十分な収束値が得られる。なお、中央面の水平方向の変位の計算において、 σ_z の影響量の算定に和分法が用いられる。

(2) 柱頭部の解法; (3次元非軸対称問題としての解析)

柱頭部の解析法は前報告³⁾で述べたように、半無限弾性体から柱頭部に相当する部分を境界面の条件を満たして切り取るものである。このために、図-7に示すように、半無限体内に柱頭部を囲む調整面(Ⅰ, Ⅱ等)を想定し、これらの調整面上に調整力の分布を与え、それらの作用によって真の境界条件を調整する。

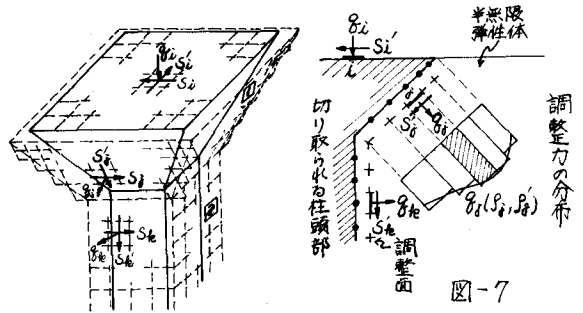


図-7

さて、このような調整力の分布を与える基本解として、図-8に示される半無限体内の任意点に、垂直、ならびに水平方向の集中力がそれぞれ作用する Mindlin 第1, 第2問題の解を用いる。この際 $D=0$ とすれば、表面荷重に対する Boussinesq, Cerruti の解が得られ、これらの積分は、柱頭部の表面である板との合成面に作用する不静定力の分布を与えるために用いられる。

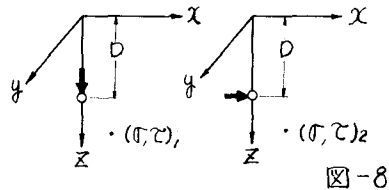


図-8

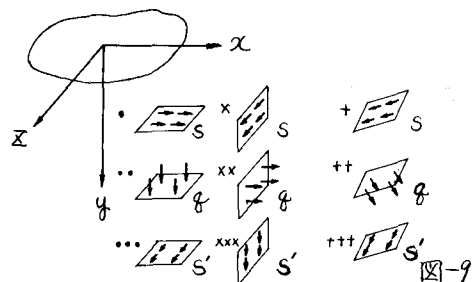


図-9

今、半無限体内に作用させる分布力の要素を図-9に見るように、前述の基本解をそれぞれ、垂直、水平、斜め方向の長方形面に積分して与

える。それぞれの面に作用する各方向の分布力の強さを、 S, g, S' で表わし、図-9にマークした分布力による弾性体内の任意点の応力成分を次のように記述する。

$$\begin{aligned} & \cdot S \times \square(\sigma, \tau)_2 \quad \times S \times \square(\sigma, \tau)_2 \quad + S \times \square(\sigma, \tau)_2 \\ & \cdot g \times \square(\sigma, \tau)_1 \quad \times g \times \square(\sigma, \tau)_2 \quad ++ g \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\} \\ & \cdot S' \times \square(\sigma, \tau)_2 \quad \times S' \times \square(\sigma, \tau)_1 \quad +++ S' \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\} \end{aligned}$$

演算記号として、 $(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2$ はそれぞれ、単位荷重に対する Mindlin 第1問題、および第2問題の応力成分であり、 $\square, \square, \square$ の表示はそれらの水平、垂直、斜め長方形面への積分を表わす。また、 $\square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\}$ は互に直角なコンポーネントに対する Mindlin 第1、第2問題の応力成分の斜め長方形面への積分の重ね合わせを意味する。なお、表面荷重 S, g, S' による応力成分を $S \times \square(\sigma, \tau)_{z=0}, g \times \square(\sigma, \tau)_{z=0}$ で表わす。これらは、柱頭部においては、特解に相当するものである。

ふたたび、図-7について、柱頭の表面にあたる部分を、スラブの合成面と同一の有限小領域に分割し、スラブとの間に受け渡される予静定力 g_i, S_i, S'_i の分布を Boussinesq, Cerruti の解の積分によって与える。つぎに、柱頭部を囲む調整面のそれぞれを、有限長方形領域 (j, k など) によって分割する。さらに図-9に示した方法で、これらの長方形領域のそれぞれにおいて等分布する調整力 (g_j, S_j, S'_j など) を与え、それらの作用によって真の境界面の境界条件を調整する。すなわち、調整力は未知量である。また、有限領域の分割、singularity を避けるために採られる調整面と境界面との距離は、境界条件の精度に対応して定める。垂直面の調整の精度については、前報告²⁾でも1例を示したが、本学会に提出した別文で、斜め境界の調整、その他についての data を提示している。

いま、境界面上の選点 m は自由な条件をもつ、すなわち、境界条件は、

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau)_m = & \sum_i \{g_i \times \square(\sigma, \tau)_{i, z=0} + S_i \times \square(\sigma, \tau)_{i, z=0} + S'_i \times \square(\sigma, \tau)_{i, z=0}\}_m + \sum_j \{g_j \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\} \\ & + S_j \times \square(\sigma, \tau)_2 + S'_j \times \square\{(\sigma, \tau)_1, (\sigma, \tau)_2\}\}_m + \sum_k \{g_k \times \square(\sigma, \tau)_2 + S_k \times \square(\sigma, \tau)_2 + S'_k \times \square(\sigma, \tau)_1\}_m = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

(3) 柱の解法 (1次元解析)

柱頭部の3次元解析の結果、深さ Z_p の位置で変位が1方向性を持つことが認められれば、それ以下の部分③は短柱として処理する。

(4) 連続条件

スラブと柱頭部の連続条件は両者の合成面上に採った各選点 n において3方向の変位 (u, v, w) を連続させる。

柱頭部と柱の連続条件は両者の鉛直方向の変位 w (一定) を連続させる。

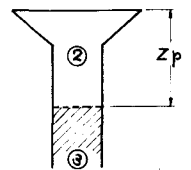


図-10

目下、図-1に示すような、等分布荷重を受け対称フラットスラブについて、各構造要素の結合状態、境界面と調整面の距離等の精度について検討中であり、結果は、講演時に報告する。