

(1) 緒言

著者は平板・骨組複合構造物の解法に関する研究の一環として、接線方向を連続ばりあるいはラーメンで弾性支持される扇形平板の解法⁽¹⁾を公表したが、日常多見される扇形平板は曲線橋床版におけるごとく接線方向のみならず半径方向にも骨組にて弾性支持されている。したがって本研究では特に半径方向に配置された弾性ばりの扇形平板におよぼす影響を解明するため、2直線辺が単純ばりあるいは連続ばりで弾性支持され、2円弧辺が任意の境界条件を有する扇形平板の解法を提示するものである。一般に平板の解法には Fourier 級数による厳密解法と、有限要素法、差分法、逐次法などに代表される近似解法があるが、前者はその適用が特殊な境界条件に限定されるのに対し、後者は任意の境界条件を有する場合に適用できることは周知のとおりである。本題の扇形平板においても、半径方向のフーリエ展開が不可能であるため、近似解法によるなければならないが、有限要素法と差分法とを比較した場合同一分割数においては差分法の方が未知数が少なくて済み、しかも分割数を小さくすることにより高精度の解が得られることから差分法を適用した。

(2) 解法

1. 基礎微分方程式および断面力の差分化

図-1(a)に示すごとく扇形平板 ABCD が 2直線辺 AB, CD においてはり部材により弾性支持され、2円弧辺 AD, BC において任意の境界条件を有するものとする。しかる時扇形平板の中心 O を原点とする円筒座標 (r, θ, z) を導入すれば、 z 軸方向のたわみ w を求めるための基礎微分方程式は、次式で与えられる。

$$\nabla^4 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = p(r, \theta) / D \quad \text{----- (1)}$$

ここに $p(r, \theta)$: 垂直荷重, $D = E_p h_p^3 / 12(1-\nu_p^2)$: 板剛度, E_p : ヤング率, h_p : 板厚, ν_p : ポアソン比

次に図-1(b)のごとく辺 AB, BC を m 等分する同心円弧と中心角 α を n 等分する放射線とで形成される格子により扇形平板を分割し、任意格子 (i, j) を中心に図のごとき格子番号を付すとき格子点 (i, j) において式(1)を差分化すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\lambda^2}{r_i^2} \right) w_{i+2,j} + \frac{2\kappa^2}{r_i^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2r_i} \right) (w_{i+1,j-1} + w_{i+1,j+1}) - \left\{ 4 \left(1 + \frac{\lambda}{2r_i} \right) + \frac{1}{r_i^2} \left(1 - \frac{\lambda}{2r_i} \right) (\lambda^2 + 4\kappa^2) \right\} w_{i+1,j} + \frac{\kappa^2}{r_i^2} (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) \\ & + \frac{\kappa^2}{r_i^2} \left\{ 1 - \frac{1}{r_i} (\lambda^2 - \kappa^2) \right\} (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + 2 \left\{ 3 + \frac{1}{r_i} (\lambda^2 + 4\kappa^2) - \frac{\kappa^2}{r_i^2} (4\lambda^2 - 3\kappa^2) \right\} w_{i,j} + \frac{2\kappa^2}{r_i^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2r_i} \right) (w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}) \\ & - \left\{ 4 \left(1 - \frac{\lambda}{2r_i} \right) + \frac{1}{r_i^2} \left(1 + \frac{\lambda}{2r_i} \right) (\lambda^2 + 4\kappa^2) \right\} w_{i-1,j} + \left(1 - \frac{\lambda}{r_i} \right) w_{i-2,j} = p \lambda^2 / \theta \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

ここに $\lambda = (R_2 - R_1) / m$, $w = \alpha / n$, $\kappa = \lambda / w$, r_i : 格子点 (i, j) 点の半径

また格子点 (i, j) における板の諸断面力はたわみ w の微分式で与えられるゆえ、これらについて式(1)と同様に格子点 (i, j) における差分方程式に変換すれば次式のとおりである。

$$M_{r(i,j)} = - \frac{D}{\lambda} \left\{ \left(1 - \frac{\nu \lambda}{2r_i} \right) w_{i+1,j} + \left(1 + \frac{\nu \lambda}{2r_i} \right) w_{i+1,j} - 2 \left(1 + \frac{\nu \kappa^2}{r_i^2} \right) w_{i,j} + \frac{\nu \kappa^2}{r_i^2} (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) \right\} \quad \text{----- (3)}$$

$$M_{\theta(i,j)} = - \frac{D}{\lambda} \left\{ \left(\nu - \frac{\lambda}{2r_i} \right) w_{i-1,j} + \left(\nu + \frac{\lambda}{2r_i} \right) w_{i+1,j} - 2 \left(\nu + \frac{\kappa^2}{r_i^2} \right) w_{i,j} + \frac{\kappa^2}{r_i^2} (w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) \right\} \quad \text{----- (4)}$$

$$M_{r\theta(i,j)} = \frac{D(1-\nu)}{2\lambda^2 r_i} \kappa \left\{ \frac{1}{2} (w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1}) + \frac{\lambda}{r_i^2} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) \right\} \quad \text{----- (5)}$$

$$Qr(u_j) = -\frac{D}{\lambda^2} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{K^2}{r_k^2}\right) W_{k-1,j} - \left(1 - \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{K^2}{r_k^2}\right) W_{k+1,j} - \frac{2\lambda}{r_k} \left(1 - \frac{2K^2}{r_k^2}\right) W_{k,j} - \frac{K^2}{2r_k^2} (W_{k-1,j+1} - W_{k+1,j+1} + W_{k-1,j-1} - W_{k+1,j-1}) \right. \\ \left. - \frac{2\lambda K^2}{r_k^2} (W_{k-1,j+1} + W_{k-1,j-1}) - \frac{1}{2} (W_{k-2,j} - W_{k+2,j}) \right\} \quad \text{----- (6)}$$

$$Go(u_j) = -\frac{D K}{2\lambda^2 r_k} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda}{r_k}\right) (W_{k+1,j-1} - W_{k-1,j+1}) + \left(1 - \frac{\lambda}{r_k}\right) (W_{k-1,j-1} - W_{k+1,j+1}) + 2 \left(1 + \frac{K^2}{r_k^2}\right) (W_{k,j+1} - W_{k,j-1}) + \frac{K^2}{r_k^2} (W_{k,j+2} - W_{k,j-2}) \right\} \quad \text{----- (7)}$$

$$Tr(u_j) = -\frac{D}{\lambda^2} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2\right) W_{k-1,j} - \left(1 - \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2\right) W_{k+1,j} - \frac{2\lambda}{r_k} \left(1 - \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2\right) W_{k,j} \right. \\ \left. - \frac{2-\nu}{2r_k^2} K^2 (W_{k,j+1} - W_{k,j+1} + W_{k-1,j-1} - W_{k+1,j-1}) - \frac{2-\nu}{r_k^2} \lambda K^2 (W_{k,j+1} + W_{k,j-1}) - \frac{1}{2} (W_{k-2,j} - W_{k+2,j}) \right\} \quad \text{----- (8)}$$

$$Vo(u_j) = \frac{D K}{\lambda^2 r_k} \left\{ \frac{K^2}{r_k^2} (W_{k,j-2} - W_{k,j+2}) + \left(\frac{K^2}{r_k^2} + \frac{\nu-1}{r_k^2} \lambda^2 + 2-\nu\right) (W_{k,j+1} - W_{k,j-1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2\nu-1}{2r_k} \lambda - 2+\nu\right) (W_{k-1,j+1} - W_{k-1,j-1}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{2\nu-1}{2r_k} \lambda + 2-\nu\right) (W_{k+1,j-1} - W_{k+1,j+1}) \right\} \quad \text{----- (9)}$$

したがって一般論には扇形平板のすべての格点において立て式(2)と、その際境界近傍の格点での操作において含まれる板外の仮想格点と同数の境界条件式を連立させて解けば所要の未知数 $W_{k,j}$ が求まり、得られた結果を式(3)~(9)に代入することにより諸断面力が計算されることになる。

2. 境界条件式

(1) 直線辺の境界条件式

本題の扇形平板は前述のごとく直線辺 AB, DC において直線ばりにより弾性支持されているゆえ、これらの端辺において板と弾性支持ばりとの間には次の事項が満足されねばならぬ。即ち、板の端辺に作用する θ 方向の板反力 V_θ は弾性支持ばりに働く垂直荷重と大きさが等しく向きが反対であり、板端辺に作用する θ 方向曲げモーメント M_θ は弾性支持ばりに働くねじりモーメントと大きさが等しく向きが反対である。このことより次の境界条件式を得る。

$$\theta = 0^\circ: \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = -\frac{V_\theta(\theta=0)}{EI}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} = -\frac{M_\theta(\theta=0)}{GC}; \quad \theta = \alpha^\circ: \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} = \frac{V_\theta(\theta=\alpha)}{EI}, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} = \frac{M_\theta(\theta=\alpha)}{GC} \quad \text{----- (10)}$$

ここに EI ははり部材の曲げ剛性, GC ははり部材のねじり剛性。

今、 $\theta = \alpha$ 上の格点 (k, j) において式(10)を差分化すれば次の2式が得られる。

$$2H \frac{K}{r_k} (W_{k-2,j} - 4W_{k-1,j} + 6W_{k,j} - 4W_{k+1,j} + W_{k+2,j}) + \frac{K^2}{r_k^2} (W_{k,j-2} - W_{k,j+2}) + \frac{2K^2}{r_k^2} \left(\frac{K^2}{r_k^2} + \frac{\nu-1}{r_k^2} \lambda^2 + 2-\nu \right) (W_{k,j+1} - W_{k,j-1}) \\ + \frac{K^2}{r_k^2} (2-\nu - \frac{2\nu-1}{2r_k} \lambda) (W_{k-1,j-1} - W_{k-1,j+1}) + \frac{K^2}{r_k^2} (2-\nu + \frac{2\nu-1}{2r_k} \lambda) (W_{k+1,j-1} - W_{k+1,j+1}) = 0 \quad \text{----- (11)}$$

$$\left(\frac{K^2}{r_k^2} - 2\nu \right) W_{k-1,j} - \left(\frac{K^2}{r_k^2} + 2\nu \right) W_{k+1,j} + 4 \left(\frac{K^2}{r_k^2} + \nu \right) W_{k,j} - 2J + \frac{K^2}{r_k^2} W_{k,j+1} + 2 \left(J - \frac{K^2}{r_k^2} \right) W_{k,j-1} + J (W_{k-1,j+1} + W_{k+1,j+1} - W_{k-1,j-1} - W_{k+1,j-1}) = 0 \quad \text{----- (12)}$$

$$\text{ここに } H = EI/D\lambda, \quad J = GC/DW$$

式(11)(12)において特に $J=0$ とおけば、弾性ばりが曲げのみに抵抗する場合、 $H=J=0$ とおけば、曲 H にもねじれにも抵抗しない場合とするわけ直線辺が自由である場合、 $J=0$ かつ $H \rightarrow \infty$ の極限状態を考えれば、直線辺が単純支持された場合、更に $H \rightarrow \infty$ かつ $J \rightarrow \infty$ なる極限状態では、直線辺が固定された場合にそれぞれ相当する。

(2) 円弧辺の境界条件式 (1) でのべた直線辺の境界条件の他に、円弧辺においても境界条件式が必要であるが、本題の目的が半径方向に配置されたはり部材の挙動を追跡することにあるから、円弧辺においては最も頻度が高くかつ重要である次の3つの場合についてのみ考えることにする。

(i) 単純支持の場合； 単純支持される円弧辺上にある格点 (k, j) においては、次の諸式が満足されねばならぬ。即ち、 $W_{k,j} = 0, \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)_{k,j} = 0, \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{k,j} = 0, Mr(u_j) = 0$ これより境界条件式として次式を得る。

$$(2r_k + \nu\lambda) W_{k+1,j} + (2r_k - \nu\lambda) W_{k-1,j} = 0 \quad \text{----- (13)}$$

(ii) 固定支承の場合； 同様に固定支承上の格点 (k, j) においては次式が成立せねばならぬ。

$$W_{k,j} = 0, \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{k,j} = 0, \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2}\right)_{k,j} = 0, \left(\frac{\partial^3 W}{\partial \theta^3}\right)_{k,j} = 0 \quad \text{したがってこの場合の境界条件式は、次の}$$

とありである。 $W_{i+1,j} - W_{i,j} = 0$ ----- (14)

(iii)自由の場合； 同様に自由縁上の格点 α, j においては $M_{r(\alpha,j)} = 0$, $V_{r(\alpha,j)} = 0$ が成り立ち、これにより次に示す式が境界条件式として得られる。

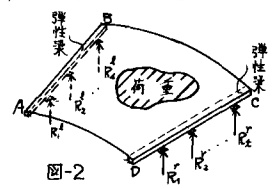
$$(1 + \frac{2\lambda^2}{r_k^2}) W_{i+1,j} - 2(1 + \frac{\lambda^2}{r_k^2}) W_{i,j} + (1 - \frac{\lambda^2}{2r_k^2}) W_{i-1,j} + \frac{\lambda^2}{r_k^2} (W_{i,j-1} + W_{i,j+1}) = 0$$
 ----- (15)

$$(W_{i+2,j} - W_{i-2,j}) - 2(1 - \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2) W_{i+1,j} - \frac{4\lambda}{r_k} (1 - \frac{3-\nu}{r_k^2} K^2) W_{i,j} + 2(1 + \frac{\lambda}{r_k} + \frac{\lambda^2}{2r_k^2} + \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2) W_{i-1,j} + \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2 (W_{i+1,j-1} + W_{i+1,j+1}) - \frac{2-\nu}{r_k^2} K^2 (W_{i-1,j-1} + W_{i-1,j+1}) = 0$$
 ----- (16)

以上の所論により、式(2)および式(11)(12)と式(13)~(16)とを適宜組合わせて得られる式群を連立に解くことにより、本題が解析されることとなる。

3. 直線辺が連続ばりにて弾性支持される場合の解法

前述の連立方程式を解く際、未知数 w の係数行列の逆行列を求めておけば、これを利用して直線辺の弾性支持ばりが図-2に示すごとき連続ばりとなる場合の問題も、改めて連続ばりによる境界条件式を立てることなく、解析され極めて有利である。



いま図のじとく扇形平板が $(s+1)$ スパンの連続ばり AB、および α (t+1) スパンの連続ばり DC により弾性支持されるものとし、中間支点の反力をそれぞれ $R_1^A, \dots, R_s^A$, $R_1^B, \dots, R_s^B$, および $R_1^C, \dots, R_t^C$, $R_1^D, \dots, R_t^D$ 、支点の垂直変位量を $d_1^A, \dots, d_s^A$, $d_1^B, \dots, d_s^B$, $d_1^C, \dots, d_t^C$, $d_1^D, \dots, d_t^D$ とする。しかるとき各中間支点における変位条件式を立てれば次のごとき反力を求めるための基本連立方程式が得られる。

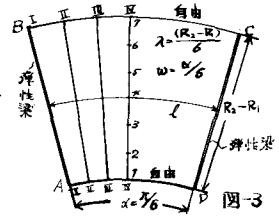
$$\sum_{i=1}^s R_i^A \delta_{Ri}^A + \sum_{j=1}^s R_j^B \delta_{Rj}^B = \delta_R^A - d_R^A \quad (R \in \{A, B, \dots, \alpha\}), \quad \sum_{i=1}^s R_i^C \delta_{Ri}^C + \sum_{j=1}^t R_j^D \delta_{Rj}^D = \delta_R^C - d_R^C \quad (R \in \{C, D, \dots, \alpha\})$$
 ----- (17)

ここに δ は単純ばりで弾性支持される扇形平板のたわみで、いずれも上述の逆行列より求められ、

- δ_{Ri}^A : 辺 AB 上の i 点に $p=1$ が作用する場合の辺 AB 上の R 点のたわみ量
- δ_{Rj}^B : 辺 BC 上の j 点に $p=1$ が作用する場合の辺 AB 上の R 点のたわみ量
- δ_{Ri}^C : 辺 AB 上の i 点に $p=1$ が作用する場合の辺 DC 上の R 点のたわみ量
- δ_{Rj}^D : 辺 DC 上の j 点に $p=1$ が作用する場合の辺 DC 上の R 点のたわみ量

δ_R^A : 荷重による辺 AB 上の R 点のたわみ量, δ_R^C : 荷重による辺 DC 上の R 点のたわみ量

式(17)を連立にすれば不静定反力がもとまり、えられる結果を用い扇形平板の任意点に式(17)と同様の操作をほどかせば図-2に示す扇形平板のたわみが決定され、更にたわみを断面力の差分式に代入すれば断面力もまた算出されることになる。



[3] 数値計算例 図-3に示すごとき中心角 $\alpha = \pi/6$ 、辺長比 $s = l(R_2 - R_1) = 1.0$ なる扇形平板において辺 AB, DC が単純ばりにて弾性支持され、辺 AD, BC が自由であり、かつ等分布荷重 p が満載されるものとする。しかるとき、 $\nu = 0.3$ $H = EI/\Delta l = 10.0$, $J = GC/\Delta w = 0$ として、たわみ w および r, θ 方向曲げモーメントを計算すれば図-4のごとき得られる。

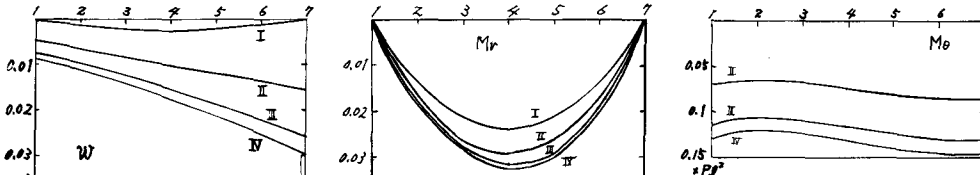
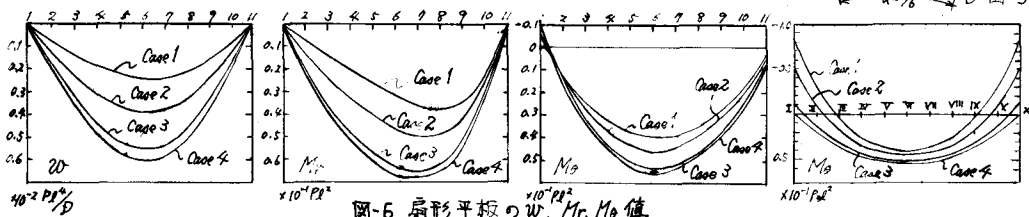
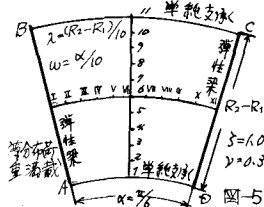


図-4. $H=10, J=0$ の場合の w, M_r, M_θ 値

次いで前例と同一の形状を有する扇形平板についてHの種々の値に対する板中央点のたわみ w , r , θ 方向の曲げモーメントの値を算出すれば表1に示す諸値が得られる。この表から明らかなように、剛比 $H \leq 0.1$ の範囲では、たわみ w , 曲げモーメント M_r, M_θ は $H=0$ の場合と比較して4%程度の差があるにすぎず、また $H \geq 500$ の範囲ではそれらの値は $H \rightarrow \infty$ に較べて2%程度の相違しか存在しない。したがって $H \leq 0.1$ ではその境界を自由縁、 $H \geq 500$ ではその境界を単純支持と見なして差しつかえなうと言える。更に図5に示すごとき、2直線辺が単純ばりにて弾性支持され2円弧辺が単純支持される扇形平板の $\theta = \frac{\pi}{2}$ 断面、および $r = \frac{R_1 + R_2}{2}$ 断面におけるたわみ w , r, θ 方向曲げモーメントに対して弾性支持ばりの曲げおよびねじれ剛性のおよぼす影響を調べるため、 $H=J=10000$ (Case 1), $H=J=10$ (Case 2), $H=J=1$ (Case 3), および $H=J=0$ (Case 4) の4つの場合について比較対照すれば図6のごとくである。図に見られるように扇形平板中央点において、Case 1の諸量をCase 4と比較すれば、たわみ w において55%, M_r において53%, M_θ において28%の減少を示している。しかし、当然のことながらCase 1は弾性支持ばり上およびその近傍で負の M_θ を生じており、その値は板中央点のそれの1.5倍にも達している。

表1. 扇形平板中央点のたわみ、モーメント値

H	w (xPR ²)	M _r (xPR ²)	M _θ (xPR ²)
∞	0.01576	0.0197	0.1039
10000	0.01576	0.0197	0.1039
1000	0.01578	0.0198	0.1039
500	0.01581	0.0200	0.1038
100	0.01601	0.0213	0.1037
50	0.01625	0.0228	0.1036
10	0.01781	0.0327	0.1297
5	0.01944	0.0430	0.1288
1	0.02324	0.0670	0.1269
0.5	0.02452	0.0754	0.1263
0.1	0.02838	0.0991	0.1240
0.05	0.02870	0.1011	0.1238
0.01	0.02897	0.1027	0.1237
0.001	0.02903	0.1031	0.1236
0.0001	0.02904	0.1032	0.1236
0	0.02904	0.1032	0.1236



[4] 結語

本法は扇形平板の適合条件式(2)および直線辺の境界条件式(11)(12)と円弧辺の境界条件式(13)~(16)とを組合わせて得られる諸式を連立に解けば所要のたわみが求められるが、未知数の係数行列の逆行列を求めれば扇形平板に作用する荷重が種々異なる場合に適用できることは勿論、本論でも述べたごとく単純ばりで弾性支持される扇形平板を基本構にとり、連続ばりの中間支点反力を余力にえらば、この逆行列を用いて直線辺が連続ばりで弾性支持される扇形平板の解法も可能となる点極めて有利である。本研究では接線方向、半径方向を等間隔に分割したいわゆる普通差分を適用したが、この他に不等距離差分あるいは高精度差分をも応用し、解の精度を検討することも今後の重要課題である。

また本題では直線辺が弾性支持される扇形板の解法に留めたが、直線辺および円弧辺がともに弾性支持されるごとく扇形板・骨組複合構造物の解析も可能であり、これらについては逐次発表の予定である。

参考文献: (1) 山崎、櫻木、金子; 連続円形曲りはりにて弾性支持される扇形板の解法; 九大工学集報第41巻第6号, 昭和43年12月
(2) 吉村; 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて; 土木学会論文集第82号昭和37年6月 (3) 奥村; 曲線直交異方性扇形平板の階差法による解法; 土木学会論文集第140号昭和42年6月 (4) A. Ang; The development of a distribution procedure for the analysis of continuous rectangular plates; Civil Engineering Saunders Structural Research Series no. 196; May 1959, University of Illinois.