I-156　一対辺がラーメンと剛結する矩形板の影響面解法

川崎製鉄株式会社　正員　山崎徳也

九州大学工学部　学生員　○金子忠男

1　緒言

著者らは先に，平面板と連続ばりやラーメンなどの骨組とで構成される平面板・骨組複合構造物の解法について発表し[1][2]，平面板を弾性支持する骨組のはり部材の曲げおよびねじり剛性が平面板の諸変形，諸断面力におよぼす影響を明らかにしたが，これらと同様の手法によりこの種複合構造物の影響面解法も可能である。骨組や平面板構造物の設計にあたっては，その影響線，影響面が求められていれば非常に便利であることはいうまでもなく，特に平面板においてはその理論および計算が非常に複雑であることを考え合せれば必要不可欠であるといえる。また，移動荷重の作用を受ける橋梁の床版のごときは最大応力値を追跡するのに極めて有用である。したがって本研究は，一対辺が単純支持され他の対辺がラーメンで弾性支持される矩形板・骨組複合構造物の不静定反力および板内の諸変位，諸断面力の影響面の解法を提示するものである。

2　解法

(1)たわみ曲面

図-1に示すごとく，矩形板ABDCが辺AB，CDで単純支持され，辺AC，BDでラーメンのはり部材列により弾性支持されているものとする。また，辺ABにそってx軸，辺ACにそってy軸，両軸に直交してz軸を有する直交座標系（x, y, z）を導入し，点G（$\bar{x}$, $\bar{y}$）に単位荷重P＝1が作用しているものとすれば，矩形板ABDCのz軸方向のたわみwは次式のごとく与えられる。

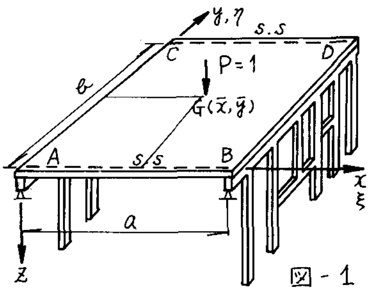


図-1

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \,\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi + aB_n\xi\,\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi + C_n\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi + aD_n\xi\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi)\sin n\pi\eta + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}G_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta \quad (1)$$

ここに，$A_n \sim D_n$；積分定数，$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，sh, ch；sinhおよびcoshの略，a, b；辺長，m, n；正整数

$\mu=b/a$；辺長比，$\gamma_n=n\pi/\mu$，$D=E_p h_p^3/\{12(1-\nu^2)\}$；板剛度，$E_p$；ヤング率，$h_p$；板厚，

ν；ポアッソン比，$G_{mn}=a^4F_{mn}/\{\pi^4D(m^2+n^2/\mu^2)^2\}$，$F_{mn}=4P/(\mu a^2)\sin m\pi\bar{\xi}\sin n\pi\bar{\eta}$.

式(1)に含まれる4つの積分定数$A_n \sim D_n$は辺AC，BDにおける境界条件により決定される。本題の矩形板ABDCは辺AC，BDにおいてたわみおよび端モーメントを有するが，これらをそれぞれ$\delta_A(\eta)$，$M_A(\eta)$および$\delta_B(\eta)$，$M_B(\eta)$とし，次のごとくフーリエ級数で展開できるものと仮定する。

$$\left.\begin{aligned}\delta_A(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{An}\sin n\pi\eta, & \delta_B(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{Bn}\sin n\pi\eta\\ M_A(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}M_{An}\sin n\pi\eta, & M_B(\eta)&=\sum_{n=1}^{\infty}M_{Bn}\sin n\pi\eta\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

ここに，δ_{An}, δ_{Bn}, M_{An}およびM_{Bn}は任意定数であり，$\delta_A(\eta)$，$\delta_B(\eta)$はz軸の正方向のものを正，$M_A(\eta)$ $M_B(\eta)$はη軸に関して右回りのものを正とする。

しかるとき，辺ACおよびBDの境界条件として次式が与えられることとなる。

$$\left.\begin{aligned}\xi=0\text{ で，}\quad &(w)_{\xi=0}=\delta_A(\eta), \quad (M_\xi)_{\xi=0}=-D/a^2(\partial^2w/\partial\xi^2+\nu/\mu^2\cdot\partial^2w/\partial\eta^2)_{\xi=0}=M_A(\eta)\\ \xi=1\text{ で，}\quad &(w)_{\xi=1}=\delta_B(\eta), \quad -(M_\xi)_{\xi=1}=D/a^2(\partial^2w/\partial\xi^2+\nu/\mu^2\cdot\partial^2w/\partial\eta^2)_{\xi=1}=M_B(\eta)\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

式(3)に式(1)および(2)を代入すれば，未知積分定数$A_n \sim D_n$に関する諸式をうるが，これらを連立に解けば，$A_n \sim D_n$が次のごとく任意定数δ_{An}, δ_{Bn}, M_{An}, M_{Bn}の関数として求められる。

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= -(M_{An}+M_{Bn}\,\mathrm{ch}\,\gamma_n)/(2\gamma_n\,\mathrm{sh}^2\gamma_n)\cdot a^2/D - \delta_{An}\{\mathrm{ch}\,\gamma_n+(1-\nu)\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\}/\mathrm{sh}\,\gamma_n + \delta_{Bn}\{1+(1-\nu)\gamma_n\,\mathrm{ch}\,\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\}/\mathrm{sh}\,\gamma_n,\\
B_n &= -M_{An}/(2\gamma_n)\cdot a/D, \qquad C_n=\delta_{An},\\
D_n &= (M_{An}\,\mathrm{ch}\,\gamma_n+M_{Bn})/(2\gamma_n\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\cdot a/D + \delta_{An}(1-\nu)\gamma_n\,\mathrm{ch}\,\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)/a-(1-\nu)\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\cdot\delta_{Bn}/a
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

式(4)を式(1)に代入し，$M_{An}, M_{Bn}, \delta_{An}, \delta_{Bn}$について整理すれば，$w$は次式のごとく書き改められる。

$$w(\xi,\eta)=a^2/D\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(\xi)M_{An}+b_n(\xi)M_{Bn}+c_n(\xi)\delta_{An}\cdot D/a^2+d_n(\xi)\delta_{Bn}\cdot D/a^2+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}\sin m\pi\bar{\xi}\sin n\pi\bar{\eta}\sin m\pi\xi\}\sin n\pi\eta,\quad(5)$$

ここに，
$$\bar{G}_{mn}=4P/\{\mu\pi^4(m^2+n^2/\mu^2)^2\}.$$

$$\left.\begin{aligned}
a_n(\xi)&=(-\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi/\mathrm{sh}^2\gamma_n-\xi\,\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi+\xi\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi\cdot\mathrm{ch}\,\gamma_n/\mathrm{sh}\,\gamma_n)/(2\gamma_n),\\
b_n(\xi)&=(-\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi\cdot\mathrm{ch}\,\gamma_n/\mathrm{sh}^2\gamma_n+\xi\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi/\mathrm{sh}\,\gamma_n)/(2\gamma_n),\\
c_n(\xi)&=-\{\mathrm{ch}\,\gamma_n+(1-\nu)\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\}\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi/\mathrm{sh}\,\gamma_n-(1-\nu)\gamma_n\xi\,\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi/2+\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi+(1-\nu)\gamma_n\xi\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\cdot\mathrm{ch}\,\gamma_n\\
d_n(\xi)&=\{1+(1-\nu)\gamma_n\,\mathrm{ch}\,\gamma_n/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)\}\mathrm{sh}\,\gamma_n\xi/\mathrm{sh}\,\gamma_n-(1-\nu)\gamma_n\xi\,\mathrm{ch}\,\gamma_n\xi/(2\,\mathrm{sh}\,\gamma_n)
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

式(5)における任意定数$M_{An}, M_{Bn}, \delta_{An}$および$\delta_{Bn}$は板の端辺AC，BDとこれを弾性支持するラーメンのはり部材列との変形の連続条件を考慮することにより決定される。まずラーメンのはり部材列のたわみ$\bar{d}(\eta)$およびねじれ回転角$\varphi_\xi(\eta)$を示せば次のとおりである（文献(1)参照）。

$$\bar{d}(\eta)=l^4/(EI)\sum_{n=1}^{\infty}1/(n\pi)^4\Big(p_n-2/l\sum_{i=1}^{k}R_i\sin n\pi\varepsilon_i+2n\pi/l^2\sum_{i=0}^{k+1}M_{\eta i}\cos n\pi\varepsilon_i\Big)\sin n\pi\eta \quad(7)$$

$$\varphi_\xi(\eta)=l^2/(GJ)\sum_{n=1}^{\infty}1/(n\pi)^2\Big(m_n-2/l\sum_{i=1}^{k}M_{\xi i}\sin n\pi\varepsilon_i\Big)\sin n\pi\eta \quad(8)$$

ここに，EI, GJ；はり部材列の曲げおよびねじり剛性，l；はり部材列長，k；はり部材列を支持する中間支柱の数，$p_n=2/l\int_0^l p(\eta)\sin n\pi\eta\,d\eta$，$m_n=2/l\int_0^l m(\eta)\sin n\pi\eta\,d\eta$，$p(\eta)$；任意垂直荷重，$m(\eta)$；任意ねじりモーメント荷重，$R_i, M_{\eta i}, M_{\xi i}$；中間支柱の柱頭に生ずる不静定反力および$\eta, \xi$方向の反力モーメント，$\varepsilon_i$；はり部材列の端部から$i$番目の中間支柱までの距離の無次元表示

さて式(7)および(8)を本題のはり部材列に適用する場合，垂直荷重$p(\eta)$として板端より伝達されるξ方向板反力$V_A(\eta), V_B(\eta)$を，またねじりモーメント荷重$m(\eta)$として板の端モーメント$M_A(\eta), M_B(\eta)$をそれぞれ符号を考慮して用いればよく，えられた結果が板端のたわみである式(2)および板端たわみ角$(\partial w/a\partial\xi)_{\xi=0}$および$(\partial w/a\partial\xi)_{\xi=1}$に等しいことより次の諸式がえられる。

$$\delta_{An}=a^2\kappa_A/(\mu\gamma_n^4D)\cdot\Big(aV_{An}-2/\mu\sum_{i=1}^{r}R_i^A\sin n\pi\varepsilon_i^A+2\gamma_n/(\mu a)\sum_{i=0}^{r+1}M_{\eta i}^A\cos n\pi\varepsilon_i^A\Big), \quad(9)$$

$$\delta_{Bn}=a^2\kappa_B/(\mu\gamma_n^4D)\cdot\Big(-aV_{Bn}-2/\mu\sum_{j=1}^{s}R_j^B\sin n\pi\varepsilon_j^B+2\gamma_n/(\mu a)\sum_{j=0}^{s+1}M_{\eta j}^B\cos n\pi\varepsilon_j^B\Big), \quad(10)$$

$$\begin{aligned}
&a_n'(0)M_{An}+b_n'(0)M_{Bn}+c_n'(0)\delta_{An}\cdot D/a^2+d_n'(0)\delta_{Bn}\cdot D/a^2+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(m\pi)\sin m\pi\bar{\xi}\sin n\pi\bar{\eta}\\
&\qquad=\kappa_A/(\mu\gamma_n^2\rho_A)\cdot\Big(-M_{An}-2/(\mu a)\sum_{i=1}^{r}M_{\xi i}^A\sin n\pi\varepsilon_i^A\Big),
\end{aligned}\quad(11)$$

$$\begin{aligned}
&a_n'(1)M_{An}+b_n'(1)M_{Bn}+c_n'(1)\delta_{An}\cdot D/a^2+d_n'(1)\delta_{Bn}\cdot D/a^2+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(-1)^m(m\pi)\sin m\pi\bar{\xi}\sin n\pi\bar{\eta}\\
&\qquad=\kappa_B/(\mu\gamma_n^2\rho_B)\cdot\Big(-M_{Bn}-2/(\mu a)\sum_{j=1}^{s}M_{\xi j}^B\sin n\pi\varepsilon_j^B\Big).
\end{aligned}\quad(12)$$

ここに，$V_A(\eta)=(V_\xi)_{\xi=0}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{An}\sin n\pi\eta$，　$V_B(\eta)=(V_\xi)_{\xi=1}=\sum_{n=1}^{\infty}V_{Bn}\sin n\pi\eta$

r, s；辺AC, BDにおけるラーメンのはり部材列の中間支柱数，$(\,'\,)$；ξについての1回微分，

$\kappa_A=\mu aD/(E^AI^A)$，$\kappa_B=\mu aD/(E^BI^B)$，$\rho_A=G^AJ^A/(E^AI^A)$，$\rho_B=G^BJ^B/(E^BI^B)$，

式(9)(10)に式(5)を代入してえられる結果と式(11)，(12)とを$M_{An}, M_{Bn}, \delta_{An}, \delta_{Bn}$について連立に解けば，これらの任意定数は結局次のごとく板を弾性支持するはり部材列の中間支柱の不静定量$R_i, M_{\xi i}, M_{\eta i}$の一次結合式であらわされる。

$$M_{An}=P_n\sum_{i=1}^{r}R_i^A\sin n\pi\varepsilon_i^A-Q_n\sum_{j=1}^{s}R_j^B\sin n\pi\varepsilon_j^B-\gamma_nP_n\sum_{i=0}^{r+1}M_{\eta i}^A/a\cos n\pi\varepsilon_i^A$$

$$+\gamma_n \mathbf{Q}_n \sum_{j=0}^{s+1} M_{\eta j}^B/a \cos n\pi\varepsilon_j^B - \mathbf{R}_n \sum_{i=1}^{r} M_{\xi i}^A/a \sin n\pi\varepsilon_i^A + \mathbf{Z}_n \sum_{j=1}^{s} M_{\xi j}^B/a \sin n\pi\varepsilon_j^B + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}^A \bar{G}_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \qquad (13)$$

$$M_{Bn} = \bar{\mathbf{Q}}_n \sum_{i=1}^{r} R_i^A \sin n\pi\varepsilon_i^A - \bar{\mathbf{P}}_n \sum_{j=1}^{s} R_j^B \sin n\pi\varepsilon_j^B - \gamma_n \bar{\mathbf{Q}}_n \sum_{i=0}^{r+1} M_{\eta i}^A/a \cos n\pi\varepsilon_i^A + \gamma_n \bar{\mathbf{P}}_n \sum_{j=0}^{s+1} M_{\eta j}^B/a \cos n\pi\varepsilon_j^B$$
$$+ \bar{\mathbf{Z}}_n \sum_{i=1}^{r} M_{\xi i}^A/a \sin n\pi\varepsilon_i^A - \bar{\mathbf{R}}_n \sum_{j=1}^{s} M_{\xi j}^B/a \sin n\pi\varepsilon_j^B + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{C}_{mn}^B \bar{G}_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \qquad (14)$$

$$\delta_{An} D/a^2 = P_n \sum_{i=1}^{r} R_i^A \sin n\pi\varepsilon_i^A - Q_n \sum_{j=1}^{s} R_j^B \sin n\pi\varepsilon_j^B - \gamma_n P_n \sum_{i=0}^{r+1} M_{\eta i}^A/a \cos n\pi\varepsilon_i^A + \gamma_n Q_n \sum_{j=0}^{s+1} M_{\eta j}^B/a \cos n\pi\varepsilon_j^B$$
$$- R_n \sum_{i=1}^{r} M_{\xi i}^A/a \sin n\pi\varepsilon_i^A + Z_n \sum_{j=1}^{s} M_{\xi j}^B/a \sin n\pi\varepsilon_j^B + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}^A \bar{G}_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \qquad (15)$$

$$\delta_{Bn} D/a^2 = \bar{Q}_n \sum_{i=1}^{r} R_i^A \sin n\pi\varepsilon_i^A - \bar{P}_n \sum_{j=1}^{s} R_j^B \sin n\pi\varepsilon_j^B - \gamma_n \bar{Q}_n \sum_{i=0}^{r+1} M_{\eta i}^A/a \cos n\pi\varepsilon_i^A + \gamma_n \bar{P}_n \sum_{j=0}^{s+1} M_{\eta j}^B/a \cos n\pi\varepsilon_j^B$$
$$- \bar{Z}_n \sum_{i=1}^{r} M_{\xi i}^A/a \sin n\pi\varepsilon_i^A + R_n \sum_{j=1}^{s} M_{\xi j}^B/a \sin n\pi\varepsilon_j^B + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}^B \bar{G}_{mn} \sin m\pi\xi \sin n\pi\eta \qquad (16)$$

ここに，$\mathbf{P}_n, \mathbf{Q}_n \cdots \mathbf{R}_n, \mathbf{Z}_n$，$P_n, Q_n \cdots, R_n, Z_n$ などは n の関数であり，$\mathbf{C}_{mn}^A, \mathbf{C}_{mn}^B, C_{mn}^A, C_{mn}^B$ は m および n の関数である。

したがって，式(13)～(16)を式(5)に代入すれば，たわみ曲面 w は矩形板を弾性支持するラーメンのはり部材列の中間不静定量であらわされることとなり，本題の影響面解法はこれらの中間不静定量の影響面が求まっていればたわみの影響面はもちろん，板内任意点の諸変形，諸断面力の影響面もえられたたわみ影響面を ξ および η について適宜偏微分することにより求められることとなる。

(2) 中間不静定量の影響面　　式(13)～(16)に含まれる弾性支持はり部材列の中間不静定量は辺 AC BD におけるはり部材列の中間支柱の柱頭における垂直変位，η および ξ 方向の回転角の3つの変形条件式をそれぞれたてることによりえられる基本連立方程式より決定される（文献(1)参照）。

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{r}(D_{ik}^A - \Gamma_{ik}^A)R_i^A + \sum_{j=1}^{s}\bar{\Gamma}_{jk}^A R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}(\bar{D}_{ik}^A - \Psi_{ik}^A)M_{\eta i}^A/a - \sum_{j=0}^{s+1}\bar{\Psi}_{jk}^A M_{\eta j}^B/a + \sum_{i=1}^{r}\Phi_{ik}^A M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{s}\bar{\Phi}_{jk}^A M_{\xi j}^B/a = D_k^A - \mu D\, d_k^A/(\kappa_A a^2), \qquad (k = 1, 2, \cdots r) \\
&\sum_{i=1}^{r}(D_{ik}^{A'} - \Gamma_{ik}^{A'})R_i^A + \sum_{j=1}^{s}\bar{\Gamma}_{jk}^{A'} R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}(\bar{D}_{ik}^{A'} - \Psi_{ik}^{A'})M_{\eta i}^A/a - \sum_{j=0}^{s+1}\bar{\Psi}_{jk}^{A'} M_{\eta j}^B/a + \sum_{i=1}^{r}\Phi_{ik}^{A'} M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{s}\bar{\Phi}_{jk}^{A'} M_{\xi j}^B/a = D_k^{A'} - \mu D\, \varphi_{\eta k}^A/(\kappa_A a), \qquad (k = 0, 1, \cdots, r+1) \\
&\sum_{i=1}^{r}\Gamma_{ik}^A R_i^A - \sum_{j=1}^{s}\bar{\Gamma}_{jk}^A R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}\Psi_{ik}^A M_{\eta i}^A/a + \sum_{j=0}^{s+1}\bar{\Psi}_{jk}^A M_{\eta j}^B/a - \sum_{i=1}^{r}(\mathbf{D}_{ik}^A + \mathbf{\Phi}_{ik}^A)M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{s}\bar{\mathbf{\Phi}}_{jk}^A M_{\xi j}^B/a = \mathbf{D}_k^A + \mu D \rho^A \varphi_{\xi k}^A/(\kappa_A a), \qquad (k = 1, 2, \cdots, r) \\
&\sum_{i=1}^{r}\bar{\Gamma}_{ik}^B R_i^A + \sum_{j=1}^{s}(D_{jk}^B - \Gamma_{jk}^B)R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}\bar{\Psi}_{ik}^B M_{\eta i}^A/a - \sum_{j=0}^{s+1}(\bar{D}_{jk}^B - \Psi_{jk}^B)M_{\eta j}^B/a - \sum_{i=1}^{r}\bar{\Phi}_{ik}^B M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{s}\Phi_{jk}^B M_{\xi j}^B/a = D_k^B - \mu D\, d_k^B/(\kappa_B a^2), \qquad (k = 1, 2, \cdots, s) \\
&\sum_{i=1}^{r}\bar{\Gamma}_{ik}^{B'} R_i^A + \sum_{j=1}^{s}(D_{jk}^{B'} - \Gamma_{jk}^{B'})R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}\bar{\Psi}_{ik}^{B'} M_{\eta i}^A/a - \sum_{j=0}^{s+1}(\bar{D}_{jk}^{B'} - \Psi_{jk}^{B'})M_{\eta j}^B/a - \sum_{i=1}^{r}\bar{\Phi}_{ik}^{B'} M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{s}\Phi_{jk}^{B'} M_{\eta j}^B/a = D_k^{B'} - \mu D\, \varphi_{\eta k}^B/(\kappa_B a), \qquad (k = 0, 1, \cdots, s+1) \\
&\sum_{i=1}^{r}\bar{\Gamma}_{ik}^B R_i^A - \sum_{j=1}^{s}\Gamma_{jk}^B R_j^B - \sum_{i=0}^{r+1}\bar{\mathbf{\Psi}}_{ik}^B M_{\eta i}^A/a + \sum_{j=0}^{s+1}\mathbf{\Psi}_{jk}^B M_{\eta j}^B/a - \sum_{i=1}^{r}\bar{\mathbf{\Phi}}_{ik}^B M_{\xi i}^A/a \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{s}(\mathbf{D}_{jk}^B - \mathbf{\Phi}_{jk}^B)M_{\xi j}^B/a = \mathbf{D}_k^B + \mu D \rho^B \varphi_{\xi k}^B/(\kappa_B a). \qquad (k = 1, 2, \cdots s)
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

ここに，$d_k^A, \varphi_{\eta k}^A, \varphi_{\xi k}^A, d_k^B, \varphi_{\eta k}^B, \varphi_{\xi k}^B$ は辺 AC および BD におけるはり部材列の中間支柱の柱頭の垂直変位，η，ξ 方向回転角であり，左辺の諸係数ははり部材列の中間支柱の位置および断面諸寸法によって定まる形状定数である。また右辺第1項は単位移動荷重により求まる荷重項である。

式(17)において，中間支柱の垂直変位量をすべて0とし，さらに中間支柱の柱頭における ξ，η 方向の回転角を既往のたわみ角式を用いて $M_{\xi i}$，$M_{\eta i}$ と関係づけ，しかるのち左辺に移項すれば次式となる。

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
((\Gamma^A))_{r,r} & ((\bar{\Gamma}^A))_{r,s} & ((\Psi^A))_{r,r+2} & ((\bar{\Psi}^A))_{r,s+2} & ((\Phi^A))_{r,r} & ((\bar{\Phi}^A))_{r,s} \\ \hdashline
((\Gamma^{A'}))_{r+2,r} & ((\bar{\Gamma}^{A'}))_{r+2,s} & ((\Psi^{A'}))_{r+2,r+2} & ((\bar{\Psi}^{A'}))_{r+2,s+2} & ((\Phi^{A'}))_{r+2,r} & ((\bar{\Phi}^{A'}))_{r+2,s} \\ \hdashline
((\mathbf{\Gamma}^A))_{r,r} & ((\bar{\mathbf{\Gamma}}^A))_{r,s} & ((\mathbf{\Psi}^A))_{r,r+2} & ((\bar{\mathbf{\Psi}}^A))_{r,s+2} & ((\mathbf{\Phi}^A))_{r,r} & ((\bar{\mathbf{\Phi}}^A))_{r,s} \\ \hdashline
((\bar{\Gamma}^B))_{s,r} & ((\Gamma^B))_{s,s} & ((\bar{\Psi}^B))_{s,r+2} & ((\Psi^B))_{s,s+2} & ((\bar{\Phi}^B))_{s,r} & ((\Phi^B))_{s,s}
\end{array}\right] \times \begin{bmatrix} R_1^A \\ \vdots \\ R_r^A \\ R_1^B \\ \vdots \\ R_s^B \\ M_{\eta 0}^A/a \\ \vdots \\ M_{\eta,r+1}^A/a \\ M_{\eta 0}^B/a \\ \vdots \\ M_{\eta,s+1}^B/a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^A \\ \vdots \\ D_r^A \\ D_0^{A'} \\ \vdots \\ D_{r+1}^{A'} \\ \mathbf{D}_1^A \\ \vdots \\ \mathbf{D}_r^A \\ D_1^B \\ \vdots \\ D_s^B \end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$
\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c}
((\bar\Gamma^{B'}))_{s+2,r} & ((\Gamma^{B'}))_{s+2,s} & ((\bar\Psi^{B'}))_{s+2,r+2} & ((\Psi^{B'}))_{s+2,s+2} & ((\bar\Phi^{B'}))_{s+2,r} & ((\Phi^{B'}))_{s+2,s} \\ \hdashline
((\bar\Gamma^{B}))_{s,r} & ((\Gamma^{B}))_{s,s} & ((\bar\Psi^{B}))_{s,r+2} & ((\Psi^{B}))_{s,s+2} & ((\bar\Phi^{B}))_{s,r} & ((\Phi^{B}))_{s,s}
\end{array}\right]
\left\{\begin{array}{c} M^A_{\xi 1}/a \\ \vdots \\ M^A_{\xi r}/a \\ M^B_{\xi 1}/a \\ \vdots \\ M^B_{\xi s}/a \end{array}\right\}
\left\{\begin{array}{c} D^{B'}_0 \\ \vdots \\ D^{B'}_{s+1} \\ D^B_1 \\ \vdots \\ D^B_s \end{array}\right\}
$$

ここに，$((\ ))_{i,j}$ は $i\times j$ の形状定数を要素とする小行列である。

式(18)を連立に解けば中間不静定量 R，M_η，M_ξ が求まり次のごとくである。

$$
\left.\begin{aligned}
|\Delta|\,R^A_i =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{i+p}|\Delta^{p,i}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{i+r+p}|\Delta^{r+p,i}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{i+\tilde r+p}|\Delta^{2\tilde r+p,i}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{\bar r+p+i}|\Delta^{\bar r+p,i}|\,D^B_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{i+\bar r+s+p}|\Delta^{\bar r+s+p,i}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{i+\bar r+2\tilde s+p}|\Delta^{\bar r+2\tilde s+p,i}|\,D^B_p \\
|\Delta|\,R^B_j =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{r+j+p}|\Delta^{p,r+j}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{2r+j+p}|\Delta^{r+p,r+j}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{\tilde r+p+j}|\Delta^{2\tilde r+p,r+j}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{\bar r+r+j+p}|\Delta^{\bar r+p,r+j}|\,D^B_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{t+\bar r+j+p}|\Delta^{\bar r+s+p,j+r}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{4\tilde r+2s+j+p}|\Delta^{\bar r+2\tilde s+p,j+r}|\,D^B_p \\
|\Delta|\,M^A_{\eta i}/a =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{t+i+p}|\Delta^{p,t+i}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{t+r+i+p}|\Delta^{r+p,t+i}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{\bar r+s+i+p}|\Delta^{2\tilde r+p,t+i}|\,D^A_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s}(-1)^{\bar r+t+i+p}|\Delta^{\bar r+p,t+i}|\,D^B_p + \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{2\bar r+2t+p+i}|\Delta^{\bar r+s+p,t+i}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{4\tilde r+3s+p+i}|\Delta^{\bar r+2\tilde s+p,t+i}|\,D^B_p \\
|\Delta|\,M^B_{\eta j}/a =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{2\tilde r+s+j+p}|\Delta^{p,2\tilde r+s+j}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{\bar r+s+j+p}|\Delta^{r+p,2\tilde r+s+j}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{4\tilde r+s+j+p}|\Delta^{2\tilde r+p,2\tilde r+s+j}|\,D^A_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s}(-1)^{4\tilde r+t+p+j}|\Delta^{\bar r+p,2\tilde r+s+j}|\,D^B_p + \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{4\tilde r+t+s+p+j}|\Delta^{\bar r+s+p,2\tilde r+s+j}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{2\tilde r+\bar r+\tilde s+p+j}|\Delta^{\bar r+\tilde s+p,2\tilde r+s+j}|\,D^B_p \\
|\Delta|\,M^A_{\xi i}/a =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{2\tilde r+2\tilde s+p+i}|\Delta^{p,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{\bar r+2\tilde s+p+i}|\Delta^{p+r,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{4\tilde r+2\tilde s+p+i}|\Delta^{2\tilde r+p,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^A_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s}(-1)^{\bar r+2\tilde s+2\tilde r+p+i}|\Delta^{\bar r+p,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^B_p + \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{\bar r+\tilde s+2\tilde r+p+i}|\Delta^{\bar r+s+p,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{2\tilde r+4\tilde s+\bar r+p+i}|\Delta^{\bar r+2\tilde s+p,2\tilde r+2\tilde s+i}|\,D^B_p \\
|\Delta|\,M^B_{\xi j}/a =& \sum_{p=1}^{r}(-1)^{\bar r+2\tilde s+p+j}|\Delta^{p,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^A_p + \sum_{p=1}^{r+2}(-1)^{4\tilde r+2s+p+j}|\Delta^{r+p,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^{A'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{r}(-1)^{\bar r+2\tilde r+2\tilde s+p+j}|\Delta^{p+2\tilde r,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^A_p \\
&+ \sum_{p=1}^{s}(-1)^{6\tilde r+2\tilde s+p+j}|\Delta^{\bar r+p,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^B_p + \sum_{p=1}^{s+2}(-1)^{6\tilde r+3s+p+j}|\Delta^{\bar r+s+p,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^{B'}_{p-1} + \sum_{p=1}^{s}(-1)^{2\bar r+4\tilde s+p+j}|\Delta^{\bar r+2\tilde s+p,\bar r+2\tilde s+j}|\,D^B_p
\end{aligned}\right\}\quad(18)
$$

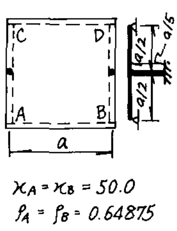
ここに，　$t=r+s$，　$\bar r=3r+2$，　$\tilde r=r+1$，　$\tilde s=s+1$，　$\bar s=3s+2$，　Δ；式(18)の左辺の係数行列，

$\Delta^{p,i}$；Δ から p 行および i 列を除去した行列，$|\Delta|$，$|\Delta^{p,i}|$；Δ および $\Delta^{p,i}$ の行列式

式(18)はそれぞれ右辺が単位移動荷重により定まる荷重項であらわされているゆえ，中間不静定量の影響面そのものである。したがって，式(18)を式(5)に代入すれば任意点のたわみ影響面が求まり，これをξ，ηについて適宜偏微分することにより諸変位，諸断面力の影響面もまた求まることとなる。

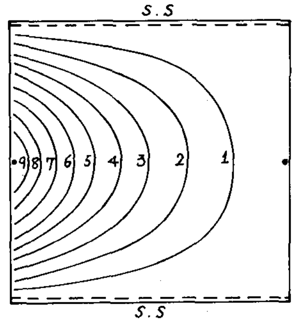
3 計算例

図－2に示すごとく，正方形板ABDCが辺ACおよびBDでT型ラーメンにより弾性支持される場合の支柱反力影響面および板中央点のたわみ影響面を求めれば図－3および図－4のごとくである。

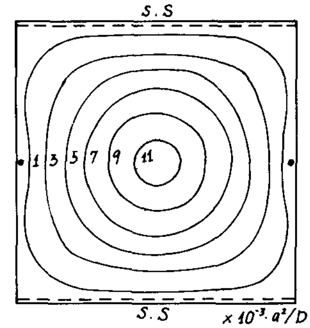


$\kappa_A=\kappa_B=50.0$
$\rho_A=\rho_B=0.64875$
$\nu=0.3$
$\mu=1.0$

図－2



図－3　R-Surface



図－4　$w(\frac{a}{2},\frac{a}{2})$-Surface

4 結語

本法の特色として次のことがいえる。すなわち，本題の矩形板の諸変形，諸断面力の影響面はすべて板を弾性支持するラーメンのはり部材端の不静定量の影響面で表現され，しかもこれらの中間不静定量の影響面は式(18)の基本連立方程式を解くだけの簡単な操作により求められる。

参考文献

(1) 山崎・樗木・全子；"一対辺がラーメンと剛結する矩形板の解法" 九大工学集報 第41巻，第2号，昭和43年3月.

(2) 山崎・樗木・全子；"連続円形曲りばりにて弾性支持される扇形板の解法" 九大工学集報，第41巻，第6号，昭和43年12月.

(3) 山崎・樗木 "周辺で単純支持されかつ中間にて点支持される無梁板の影響面解法" 九大工学集報 第40巻，第1号 昭和42年3月