

山口大学大学院 学生員 ○徳田 稔夫
山口大学工学部 正員 中川 建治

要旨 4辺単純支持された変断面矩形板は、すでに理論的に解かれている¹⁾。しかるに本文では、有限分割による階差式を用いて、Stiffness Matrix S を誘導し、この逆行列 S^{-1} を数式的に求める方法で解を得た。この解は板剛度が一定、または一方向に1次関数である有限級数解であること、分割による誤差が、分割数 m, n の2乗の逆数に比例することを示す。

1. Stiffness Matrix

図1に示すように4辺単純支持された矩形板で、板剛度 D が x 方向にのみ1次変化する場合のたわみに関する微分方程式は、

$$\Delta[D(\Delta w)] = q \quad \cdots (1)$$

である。矩形板を x, y 方向に $m+1, n+1$ 等分して、たわみに関する微分方程式を展開すれば、

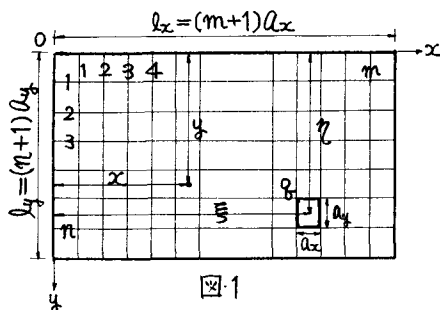
$$[S]\{w\} = [B][D][B]\{w\} = \{q\} \quad \cdots (2)$$

を得る。ここで、

$$A = \begin{bmatrix} -2(1+\frac{1}{C^2}) & \frac{1}{C^2} & & 0 \\ \frac{1}{C^2} & -2(1+\frac{1}{C^2}) & \frac{1}{C^2} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \frac{1}{C^2} & -2(1+\frac{1}{C^2}) & \frac{1}{C^2} \\ & & \frac{1}{C^2} & -2(1+\frac{1}{C^2}) \end{bmatrix} \quad \cdots (3)$$

$$C = a_x/a_y \quad \cdots (5)$$

A は $m \times m$ 行列、 B は行列 A 、単位行列 E を要素とする $n \times n$ 大行列、 D は各格点の板剛度 D を対角要素とする $m \times m$ 対角行列 D を対角要素とする $n \times n$ 対角大行列である。



$$B = \begin{bmatrix} A & E & & 0 \\ E & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & E & A & E \\ & & & E & A \end{bmatrix} \quad \cdots (4)$$

$$D = \begin{bmatrix} D & & 0 \\ & D & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D & \\ 0 & & & & D \end{bmatrix} \quad \cdots (6)$$

2. 逆行列

行列 A, B は3項行列であるから、固有値行列と固有値ベクトル行列の項に展開可能であり、次のように表わし得る。

$$B = \begin{bmatrix} \phi & & 0 \\ \phi & \ddots & \\ 0 & & \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} RE & 0 \\ ERE & \\ 0 & ER \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi & & 0 \\ \phi & \ddots & \\ 0 & & \phi \end{bmatrix}^T = \Phi \Gamma \Phi^T \quad \cdots (7)$$

$$B^{-1} = \Phi \Gamma^{-1} \Phi^T \quad \cdots (8)$$

$$\lambda_i = -2(1+C^2 - \cos \frac{i\pi}{m+1})/C^2 \quad \cdots (9)$$

$$\phi_{ij} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sin \frac{j\pi}{m+1} \quad \cdots (10)$$

したがって、式(2)より、 $S^{-1} = B^{-1} D^{-1} B^{-1} \quad \cdots (11)$

式(8)を式(11)に代入すると、 $S^{-1} = \Phi \Gamma^{-1} \Phi^T D^{-1} \Phi \Gamma^{-1} \Phi^T = F = [F_{ij}]$ (大行列) $\cdots (12)$

$$F_{ij} = [f_{st}^{ij}] \quad \text{(小行列)} \quad \cdots (13)$$

ここで Γ^{-1} を求める過程を省略するが、結果は次のようになる。

$$\Gamma^{-1} = [\Gamma_{ij}] \quad \dots\dots (14)$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1} \sin \frac{j\pi}{n+1}}{\lambda_k + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}} \quad \dots\dots (15)$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{11}^{ij} & t_{12}^{ij} & 0 \\ 0 & t_{22}^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}^{ij} \end{bmatrix} \quad \dots\dots (16)$$

これらの関係より S^{-1} は小行列 $f_{st}^{ij} = [f_{st}^{ij}]$ を要素とする大行列 $[f_{st}^{ij}]$ で求められる。

$$f_{st}^{ij} = \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^n \sum_{r=1}^n \phi_{su} t_{uw} \phi_{vr} (D_w)^{-1} \phi_{wr} t_{vr}^{ij} \phi_{tr} \\ = \left\{ \frac{4}{(m+1)(n+1)} \right\} \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi}{n+1} \sin \frac{l\pi}{n+1} \sin \frac{r\pi}{n+1} \sin \frac{j\pi}{n+1} \sin \frac{u\pi}{m+1} \sin \frac{v\pi}{m+1} \sin \frac{w\pi}{m+1} \sin \frac{t\pi}{m+1}}{D_w (\lambda_u + 2 \cos \frac{k\pi}{n+1}) (\lambda_v + 2 \cos \frac{l\pi}{n+1})} \quad \dots\dots (17)$$

3. 有限級数理論解

さて、 f_{st}^{ij} に α_y を乗じたものは何を意味するのであろうか。 i, j は y 方向分割点番号、 s, t は x 方向分割点番号であることは、 S, B の導かれた過程から明らかであり、 i, s 点載荷の j, t 点たわみ、あるいは j, t 点載荷による i, s 点たわみ影響を表わす。ここで、

$$q = P/\alpha_x \alpha_y, \quad l_x = (m+1)\alpha_x, \quad l_y = (n+1)\alpha_y \quad \dots\dots (18) \\ x = s\alpha_x, \quad y = i\alpha_y, \quad \xi = t\alpha_x, \quad \eta = j\alpha_y$$

および式(9)を式(17)に代入して整理すれば次式を得る。

$$W(x, y, \xi, \eta) = \frac{16P}{\pi^2 \alpha_x^2 \alpha_y^2} \sum_{u=1}^m \sum_{v=1}^m \sum_{w=1}^n \sum_{r=1}^n \frac{\sin \frac{u\pi}{l_x} x \sin \frac{k\pi}{l_y} y \sin \frac{v\pi}{l_x} \xi \sin \frac{r\pi}{l_y} \eta}{(u^2 \alpha_x^2 + k^2 \alpha_y^2) (v^2 \alpha_x^2 + r^2 \alpha_y^2) (1 - \Delta_{ku}) (1 - \Delta_{rv})} \\ \times \int_0^{\alpha_y} \int_0^{\alpha_x} \frac{1}{D(\alpha, \beta)} \sin \frac{v\pi}{l_x} \alpha \sin \frac{r\pi}{l_y} \beta \sin \frac{u\pi}{l_x} \alpha \sin \frac{k\pi}{l_y} \beta d\alpha d\beta \quad \dots\dots (19)$$

式(19)が4辺単純支持された変断面矩形板の解である。ここで Δ_{ku}, Δ_{rv} は次式であり、 m, n の2乗に比例するオーダーで0に収束する。

$$\Delta_{ku} = 1 - \frac{\frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_x^2} \sin^2 \frac{k\pi}{2(m+1)} - \frac{1}{\alpha_x^2} \sin^2 \frac{u\pi}{2(m+1)} \right)}{u^2 \alpha_x^2 + k^2 \alpha_y^2} \quad \Delta_{rv} = 1 - \frac{\frac{4}{\pi^2} \left(\frac{1}{\alpha_x^2} \sin^2 \frac{r\pi}{2(n+1)} - \frac{1}{\alpha_x^2} \sin^2 \frac{v\pi}{2(n+1)} \right)}{v^2 \alpha_x^2 + r^2 \alpha_y^2} \quad \dots\dots (20)$$

すなわち、当然予想されることであるが、階差法による解析誤差はFourier級数の第 $m+1, n+1$ 項以上を省略することによる誤差と、第 m, n 項までの連続関数を不連続値で取扱うことによる誤差の二つの部分に分れる。さらに式(19)で $m, n \rightarrow \infty$ とすれば、板剛度が y 方向に一定で、 x 方向には1次変化する場合の理論解が得られる。

$$W(x, y, \xi, \eta) = \frac{16P}{\pi^2 \alpha_x^2 \alpha_y^2} \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{u\pi}{l_x} x \sin \frac{k\pi}{l_y} y \sin \frac{v\pi}{l_x} \xi \sin \frac{r\pi}{l_y} \eta}{(u^2 \alpha_x^2 + k^2 \alpha_y^2) (v^2 \alpha_x^2 + r^2 \alpha_y^2)} \\ \times \int_0^{\alpha_y} \int_0^{\alpha_x} \frac{1}{D(\alpha, \beta)} \sin \frac{v\pi}{l_x} \alpha \sin \frac{r\pi}{l_y} \beta \sin \frac{u\pi}{l_x} \alpha \sin \frac{k\pi}{l_y} \beta d\alpha d\beta \quad \dots\dots (21)$$

参考文献

- 1) S. Timoshenko: Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill Kogakusha
- 2) 島田 静 雄: 土木応用数学, 共立出版
- 3) 国重敏明・中川建治: 階差法による矩形板の解析誤差に関する研究, 昭和45年度学術講演会一般講演概要集, 1970年7月