

I-154 部分支持板の曲げについて

大阪市立大学 工学部 正員 倉田宗章
 大阪市立大学 工学部 正員 谷平 勉
 大阪市立大学 工学部 正員 堀川都志雄
 大阪市立大学 工学部 学生員 小林治俊

1. はし加き

かつて筆者の一人が、^(9,20,30,41)部分固定区間を有する周辺単純支持短形板の曲げ問題を解くため工夫した三角級数表示式をその展開区間で再展開する方法は、色々の応用が考えられるので、二、三の拡張応用法を例示し参考に供したい。

2. 再展開公式

以下の応用例で用いる再展開公式を示す。図-1に示すような $0 < x < a$ 区間での三角級数表示式を部分区間の表示級数式に変換する公式は、

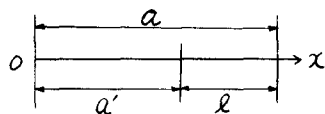


図-1

- a). 区間 $0 < x < a'$ での表示式； 区別のため部分区間での変数を u と書けば、 u の変域は、 $0 < u < a'$ となる。

$$\sum_m A_m \sin \frac{m\pi x}{a} = -\frac{2}{\pi} \sum_n n \sin \frac{n\pi u}{a'} \cdot \sum_m A_m \Phi_{nm}(a, a') \quad \text{-----(1)}$$

$$\text{ただし、} \Phi_{nm}(a, a') = \frac{(-1)^n \sin \frac{m\pi a'}{a}}{n^2 - \frac{a'^2}{a^2} m^2}$$

- b). 区間 $a' < x < a$ での表示式； 部分区間での変数を $u = x - a'$ とおけば、 u の変域は、 $0 < u < l$ と書ける。

$$\sum_m A_m \sin \frac{m\pi x}{a} = -\frac{2}{\pi} \sum_n n \sin \frac{n\pi u}{l} \cdot \sum_m A_m \Phi_{nm}(a, l) \quad \text{-----(2)}$$

$$\text{ただし、} \Phi_{nm}(a, l) = -\frac{\sin \frac{m\pi a'}{a}}{n^2 - \frac{l^2}{a^2} m^2}$$

3. L形板の曲げ

図-2-1に示すようなL形板の曲げ問題は、たとへば同図-2-2に示すようなI, IIの二つの部分に分割し、両者に対する基本系として一辺自由、残りの三辺単純支持の矩形板の解を用いる。

Iの部分については、 $\bar{g}a$ 辺、IIの部分については、 $\bar{g}e$ 辺をそれぞれ自由辺とし、Iの板では、 $e\bar{d}$ 区間に不静定反力を、 $\bar{g}e$ 区間に同様に不静定反力およびモーメントを想定し、三角級数表示をしておく、IIの板では、 $\bar{g}e$ 辺にそってIの板の $\bar{g}e$ 区間に作用する不静定量と同大反対向きの不静定量を作用させる。次に、実際荷重と上記仮想不静定量によるIの板の自由辺にそったたわみ式を前記公式(2)により、 $e\bar{d}$ 区間での表示式に展開したものを0に等置する。次に $\bar{g}e$ 区間での表示式を公式(1)で求め、IIの板の自由辺に

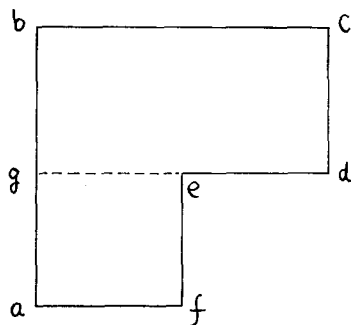


図-2-1

おけるたわみ式と等置する。さらにⅠの板の自由辺における y 方向のたわみ角式を $\bar{y}e$ 区間の表示式に公式(1)を用いて変換し、Ⅱの板の自由辺における y 方向のたわみ角式に等置する。以上、三系の連立方程式が得られるからこれを連立に解くことにより、前記の二つの不静定反力と一つの不静定モーメントが決定できれば、解は確定する。

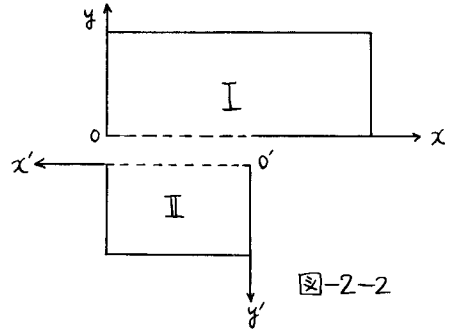


図-2-2

4. L形板への応用例;

前記3で述べたことを等分布満載荷重を受ける場合についてのL形板の解析を以下に示す。L形板は、図-3-1に示されているものを用いる。前記3での $e\bar{a}$ 辺における不静定反力を $\sum_s \bar{E}_s \sin \frac{s\pi(x-\alpha')}{\ell}$ とし(図-3-2)、 $\bar{y}e$ 辺における不静定曲げモーメントを $\sum_s \bar{G}_s \sin \frac{s\pi x}{\alpha}$ とし(図-3-3)、同様にして $\bar{y}e$ 辺における不静定反力を $\sum_s \bar{F}_s \sin \frac{s\pi x}{\alpha}$ とし(図-3-4)、前記3で述べたように、条件式としては、i) $\bar{y}e$ 辺において、Ⅰの板におけるたわみ = Ⅱの板のたわみ ii) $\bar{y}e$ 辺において、Ⅰの板の y 方向のたわみ角 = Ⅱの板の y 方向のたわみ角 iii) $e\bar{a}$ 辺において、Ⅰの板のたわみが0; (この場合、Ⅰの板、Ⅱの板のたわみは、等分布満載荷重によるたわみを含んでいるものとする。) i)~iii)の条件式から導びかれる式を最終的な形でまとめてみると、以下に示されるような式が得られる。

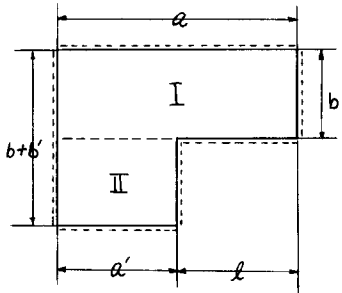


図-3-1

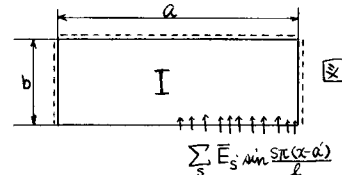


図-3-2

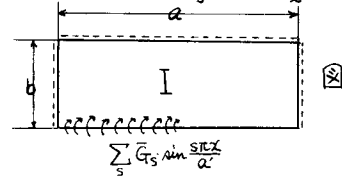


図-3-3

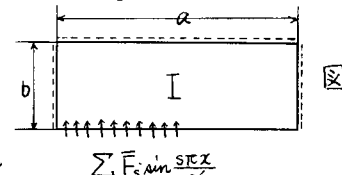


図-3-4

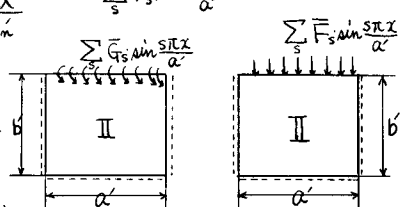


図-3-5

i)の条件式より;

$$\begin{aligned} & \sum_s \bar{E}_s \cdot \sum_m \frac{\tanh m\pi\lambda}{m^3\pi^3 \cdot \alpha_m} \cdot \Phi_{sm}(a, \ell) \Phi_{nm}(a, \alpha') \\ & + \sum_s \bar{F}_s \cdot \sum_m \frac{\tanh m\pi\lambda}{m^3\pi^3 \cdot \alpha_m} \cdot \Phi_{sm}(a, \alpha') \Phi_{nm}(a, \alpha') \\ & + \bar{F}_m \cdot \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{\alpha'}{a} \right)^2 \frac{\tanh m\pi\lambda}{m^5\pi^5 \cdot \alpha_m} \\ & + \sum_s \bar{G}_s \cdot \sum_m \frac{\alpha_m - 1}{m^2\pi^2 \cdot \alpha_m} \cdot \Phi_{sm}(a, \alpha') \cdot \Phi_{nm}(a, \alpha') \\ & - \bar{G}_m \cdot \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{\alpha'}{a} \right) \frac{\alpha_m - 1}{m^4\pi^4 \cdot \alpha_m} \\ & = -8a^2\pi \left\{ \sum_m \frac{1 - (-1)^m}{m^5\pi^5} \cdot (1 - \beta_m) \cdot \Phi_{nm}(a, \alpha') \right. \\ & \quad \left. + \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\alpha'}{a} \right)^4 \frac{1 - (-1)^m}{m^6\pi^6} \cdot (1 - \beta_m) \right\} \end{aligned}$$

ii) の条件式より;

$$\begin{aligned}
 & \sum_s \bar{E}_s \sum_m \frac{A_m}{m^2 \pi^2} \Phi_{sm}(a, l) \Phi_{nm}(a, a') \\
 & + \sum_s \bar{F}_s \sum_m \frac{A_m}{m^2 \pi^2} \Phi_{sm}(a, a') \Phi_{nm}(a, a') - \bar{F}_n \cdot \frac{\pi^4}{4} \cdot \left(\frac{a'}{a}\right) \cdot \frac{A_n}{n^4 \pi^4} \\
 & + \sum_s \bar{G}_s \sum_m \frac{B_m}{m \pi} \Phi_{sm}(a, a') \Phi_{nm}(a, a') + \bar{G}_n \cdot \frac{\pi^4}{4} \cdot \frac{B_n'}{n^3 \pi^3} \\
 & = q a^2 \pi \left\{ \sum_m \frac{1 - (-1)^m}{m^4 \pi^4} \cdot \gamma_m \Phi_{nm}(a, a') - \frac{\pi^2}{2} \cdot \left(\frac{a'}{a}\right)^3 \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^5 \pi^5} \cdot \gamma_n' \right\} \quad \text{----- (5)}
 \end{aligned}$$

iii) の条件式より;

$$\begin{aligned}
 & \sum_s \bar{E}_s \sum_m \frac{\tanh m \pi \lambda}{m^3 \pi^3 \cdot \alpha_m} \Phi_{sm}(a, l) \Phi_{nm}(a, l) \\
 & + \sum_s \bar{F}_s \sum_m \frac{\tanh m \pi \lambda}{m^3 \pi^3 \cdot \alpha_m} \Phi_{sm}(a, a') \Phi_{nm}(a, l) \\
 & + \sum_s \bar{G}_s \sum_m \frac{\alpha_m - 1}{m^2 \pi^2 \cdot \alpha_m} \Phi_{sm}(a, a') \Phi_{nm}(a, l) \\
 & = -q a^2 \pi \cdot \sum_m \frac{1 - (-1)^m}{m^5 \pi^5} \cdot (1 - \beta_m) \cdot \Phi_{nm}(a, l) \quad \text{----- (6)}
 \end{aligned}$$

ここで、次の様な置換をしている。

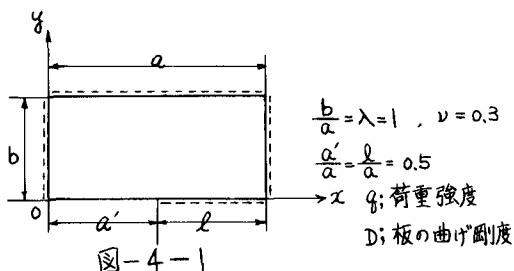
$$\begin{aligned}
 \frac{b}{a} &= \lambda, \quad \nu = \text{Poisson's ratio}, \quad a' = a - l, \quad \frac{b'}{a} = \lambda' \\
 \alpha_m &= \frac{1}{2} \frac{(3 + \nu) \sinh m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda + (1 - \nu) m \pi \lambda}{\sinh m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda}, \quad \gamma_m = \frac{2 \nu \cosh m \pi \lambda - (1 - \nu) m \pi \lambda \sinh m \pi \lambda - 2 \nu \cosh^2 m \pi \lambda}{(3 + \nu) \sinh m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda + (1 - \nu) m \pi \lambda} \\
 \beta_m &= \frac{(3 - \nu) \sinh m \pi \lambda + (1 - \nu) m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda + 2 \nu \sinh m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda}{(3 + \nu) \sinh m \pi \lambda \cosh m \pi \lambda + (1 - \nu) m \pi \lambda} \\
 A_m &= 1 - \frac{1}{\alpha_m}, \quad B_m = \frac{\cosh m \pi \lambda}{\alpha_m} \\
 \Phi_{nm}(a, l) &= -\frac{\sin \frac{m \pi a'}{a}}{n^2 - \left(\frac{l}{a}\right)^2 m^2}, \quad \Phi_{nm}(a, a') = (-1)^n \frac{\sin \frac{m \pi a'}{a}}{n^2 - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 m^2}
 \end{aligned}$$

ゆえに、式(4)、式(5)、式(6)を前記3で述べたように、連立方程式に組み立てて、係数を求め、その後、各場合におけるたわみ式、曲げモーメント式(ここでは省略する。)に代入すればよい。

5. 数値計算例;

図-4-1に示されているような板が、等分布荷重を受けた場合を考えてみる。

この場合には、前記3のIの板の $\bar{g}e$ 辺には、不静定曲げモーメント、不静定反力が働かないから前記4における式系は、式(6)のみとなる。



結果のみを記すと次の様になった。

表-1. 不静定反力が働いた時の三辺単純支持.

他の一辺が自由である板の自由辺中央部で

のたわみの収束性 (図-4-1の $x=0.5a, y=0$)

$\frac{y}{a}$ \ $\frac{x}{a}$	$n=10$	$n=15$	$n=20$	$n=25$	$n=30$	$n=35$
$\sum_{s=1}^n W_s$	0.012738	0.012782	0.012799	0.012809	0.012815	0.012819
$(\sum_{s=1}^n W_s)_{ratio}$	6.3%	2.9%	1.6%	0.8%	0.3%	0%

$$(\sum_{s=1}^n W_s)_{ratio} = \frac{0.01286 - \sum_{s=1}^n W_s}{0.01286} \times 100, \quad n = \text{前記4における項数}$$

図-4-3: たわみ W の等高線 ($\times \frac{y}{a}$)

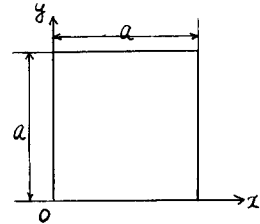
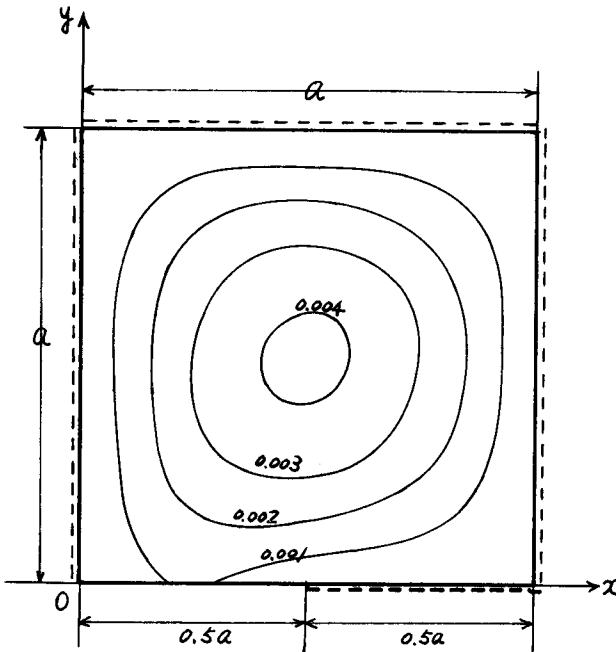


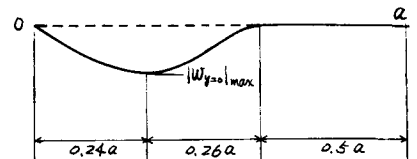
図-4-2

表-2. 他の支持形式との比較

Case	支持形式	x/a	y/a	W_{max}
A	全周単純支持辺	$x/a = 0.5$	$y/a = 0.5$	0.00406
B	三辺単純支持辺 一辺自由辺	$x/a = 0.5$	$y = 0$	0.01286
C	本形式	$x/a = 0.48$	$y/a = 0.49$	0.00419

(x, y の座標位置は図-4-2参照,
Case Bでは、 $y=0$ の辺を自由辺とする。)

図-4-4: $y=0$ でのたわみ曲線



6. あとがき;

ここにあげた計算例は、最も簡単な基本形をあげた。この基本系を応用すれば、L形板、[チャンネル形板等も解析できる。基本系に肉しての詳細とそれらの組み合わせた応用例については、当日発表したい。

- 1) 倉田宗章, 波多野 昭吾: 部分的に固定された辺を有する単純支持矩形板の曲げについて, 土木学会論文集 57号, P42~P54, 昭和33年7月
- 2) M. Kurata, Ing.-Arch. 27 (1960) p. 385
- 3) M. Kurata and H. Okamura, Z. Angew. Math. Mech. 40 (1960) p. 310
- 4) M. Kurata and H. Okamura, Proc. ASCE., J. Eng. Mech. Div., 89 (1963) p. 169