

伊藤忠電子計算サービス部 正員 武田 洋

○渡辺 隆之

1 序 文

近年の有限要素法の理論の進歩・発展には目ざましいものがあり、大型電子計算機の使用と相俟ってその可能性は大いである。また、諸外国ではこのための汎用プログラム・システムの開発も盛んである。¹⁾ このようなプログラムでは、問題が大型化することに対処すべく、種々の工夫がなされている。この代表的な手法として部分構造による解析法があり、これは計算理論と物理的な対応が明確であるばかりでなく数多くの利点がある。本論文では西独 Stuttgart 大学において開発された ASKA (Automatic System for Kinematic Analysis)²⁾ を使用しベアリング・プレートを部分構造解析法を用いることにより、接触面にローラーの条件を挿入して解き、この条件のない場合との結果の比較を行なった。

2 部分構造解析法

部分構造解析法の利点を列举すると

- (1) 同一モデルが幾つか結合されているような構造については、一つのモデルについてのみ、部分構造の解析を行ない、それを対応する主構造の部分に対して、くりかえし使用することができるので、計算時間の節約と同時に入力時のエラーを最少限におさえられる。
 - (2) 局部的にモデル変更する場合には、その部分の変更だけで済むので計算時間の節約になる。これは非線形問題にうまく適用することにより、くりかえし計算での無駄がはげける。
 - (3) 異なる材料が接触する場合には、接触の条件としてローラー、ヒンデが無理なく挿入できる
 - (4) 大型の問題に対してこれを幾つかの小型の問題に細分割するのであるから、電子計算機を短時間単位で活用できる。
 - (5) 数人が一つの問題の解析にあたる場合、その担当が明確である。
- などの点が挙げられる。

ここで部分解析法の理論について述べる。

2-1 各部分構造の計算

各部分構造ごとに平衡方程式を組立て、部分構造の外節点に内節点の剛性および外力成分の集約を行なう。一つの部分構造に着目し平衡方程式を(1)式のように表わす。

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LC} & K_{LP} & K_{LS} \\ & K_{CC} & K_{CP} & K_{CS} \\ & & K_{PP} & K_{PS} \\ & & & K_{SS} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_L \\ r_C \\ r_P \\ r_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_L \\ R_C \\ R_P \\ R_S \end{bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 K, r, R は、それぞれ剛性マトリックス、節変位、そして外力成分とあわす部分マトリックスである。そして添字 L, C, P, S はそれぞれ局部自由度 (Local Freedom)、外部自由度 (External Freedom)、規定自由度 (Prescribed Freedom)、および固定自由度 (Suppress Freedom) を意味する。

(1) 式を分解し $r_S = 0$ であることを考慮して整理すると

$$K_{LL} \cdot r_L + K_{LC} \cdot r_C = R_L - K_{LP} \cdot r_P = R'_L \quad (2)$$

$$K_{LC}^T \cdot r_L + K_{CC} \cdot r_C = R_C - K_{CP} \cdot r_P = R'_C \quad (3)$$

さらに、規定自由度と固定自由度に対する反力は

$$R_P = K_{LP}^T \cdot r_L + K_{CP}^T \cdot r_C + K_{PP} \cdot r_P \quad (4)$$

$$R_S = K_{LS}^T \cdot r_L + K_{CS}^T \cdot r_C + K_{PS}^T \cdot r_P \quad (5)$$

となる。これより(2), (3)式に着目し(2)式を r_L について解くと

$$r_L = K_{LL}^{-1} (R'_L - K_{LC} \cdot r_C) \quad (6)$$

(6) 式を(3)式に代入し(7)式のように簡単に表わす。

$$\tilde{k} \cdot r_C = \tilde{Q} \quad (7)$$

ただし

$$\tilde{k} = K_{CC} - K_{LC}^T \cdot K_{LL}^{-1} \cdot K_{LC} \quad (8)$$

$$\tilde{Q} = R'_C - K_{LC}^T \cdot K_{LL}^{-1} \cdot R'_L \quad (9)$$

これより(8), (9)式を全部分構造にわたって求めればよい。

2-2 主構造の解析

各部分構造についての計算が終わった後、全部分構造を主構造の要素と考え、主構造の平衡方程式と組立て節変位を求める。

平衡方程式を次のように表わす。

$$\tilde{K} \cdot \tilde{r}_L = \tilde{R}_L \quad (10)$$

ここで

$$\tilde{K} = \sum_{n=1}^n \tilde{a}^T \cdot \tilde{k} \cdot \tilde{a} \quad (11)$$

$$\tilde{R}_L = R_L + \sum_{n=1}^n \tilde{a}^T \cdot \tilde{Q} \quad (12)$$

となり $\tilde{R}$, $\tilde{Q}$ は (8), (9) 式で示されており, R_L は主構造における作用荷重の列マトリックスであり, $\tilde{a}$ は部分構造と主構造との結合を表すマトリックス, Σ は部分構造の総和を意味する。これより変位 $\tilde{r}_L$ は (10) 式を解くことにより求まる。

2-3 部分構造の変位の解析

主構造の変位が求まったので, 部分構造の外節点変位を求め, 工うに内節点変位を決定した後, 応力, 反力等を求める。まず, 外節点変位は (10) 式の $\tilde{r}_L$ を用いて

$$r_c = \tilde{a} \cdot \tilde{r}_L \quad (13)$$

となり, 部分構造の内節点変位を求めるには (6) 式に代入すればよい。これより内節点変位が求まったら通常の方法で要素応力, 反力等を求めればよい。従って, 2-3 の過程を全部分構造にわたって, くり返し実行することにより部分構造による解析は終了する。

3 解析例

三次元プレストレス・コンクリートの一部であるベアリング・プレートと, 軸対称問題として扱うために図1のようにモデル化した。PC鋼線は, ベアリング・プレートの穴を通りアンカー・ヘッドで固定され, 解析すべきベアリング・プレートはコンクリートにより弾性的に支持され, アンカー・ヘッドとの接触面は円周方向に移動可能と考えられる。この条件をより正しくモデル化するためには, アンカー・ヘッドとベアリング・プレートとの接触面にローラーを挿入する必要がある。このためには図1のように部分構造を, 3間の境界条件として考慮すればよい。荷重はアンカー・ヘッド上に一様に分布するものとして, 軸方向力 $-4.9973 \times 10^6 \text{ kg}$ を作用させた。各部分構造における材料特性は表1に示した。計算にあたっては TRIAX 6²⁾ Element を用いた。

結果として図2でベアリング・プレートの接触面に沿う断面 (S1) の変形をプロットした。応力とレは Von Mises 等価応力をベアリング・プレートの各断面 (S1~S6) で求め図3にプロットし, 実線はヘッドとプレートとを固定したときの値であり, 点線はローラーを挿入したときの値である。ここで等価応力 $\bar{\sigma}$ は次式より求めた。

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{2} \{ (\sigma_{rr} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{tt})^2 + (\sigma_{tt} - \sigma_{rr})^2 + 6\sigma_{rz}^2 \} \quad (14)$$

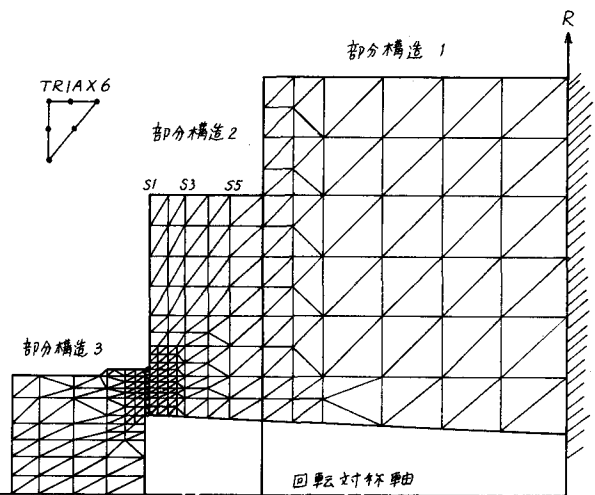


図1 軸圧縮力を受けるベアリング・プレートのモデル化

4 考 察

図スより、ベアリング・プレートのS1断面での変形状態ローラー、固定の場合では大きな相違点があることが、明らかである。すなわち、アンカー・ヘッドとベアリング・プレートと固定するとS1断面の接触している側の附近では、ヘッドにより強制的に円の中心に向かって変形させられる、という傾向を示すがローラーを挿入することによりプレートは、円の中心から外に向かって変形している。また他の断面については、固定したときにはS3断面、ローラーを挿入したときにはS5断面より、それぞれS6断面までに渡って、全体的に円の中心方向に変形するという結果が出ている。

応力(図3)についてみると、接触面と完全に固定した状態で解析すると接触面の両端で急激な応力集中を生ずる。しかし、ローラーの条件を導入することにより接触面の円周方向端での大きな応力は、生じない。また、中心方向端での応力集中は、いくぶん緩和されている。これらのことより、接触問題の応力解析においては接触面間の境界条件の導入について、十分な考慮が払われるべきであると思われる。

なお、これらの計算はCDC6600コンピュータにより実行した。

参 考 文 献

- 1) 武田洋, 成岡昌夫
“構造解析プログラム・システムについて” 土木学会誌, 56-5, 1971
- 2) J・H・ARGYRIS
“ASKA USER'S REFERENCE MANUAL” ISD-Report NO.73 Stuttgart 1971
- 3) I・GRIEGER, “Three-Dimensional Analysis of Bearing Plate Using the Finite Element Method” ISD-Report NO.88 Stuttgart 1969

材質 特性	部分構造1 (ジョイント)	部分構造2 (プレート)	部分構造3 (ヘッド)
E kg/cm ²	7.823×10 ⁷	4.125×10 ⁸	4.125×10 ⁸
ν	0.15	0.3	0.3

表1 材料特性

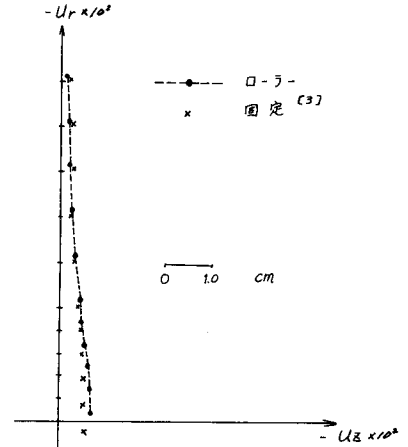


図2 S1断面の変形

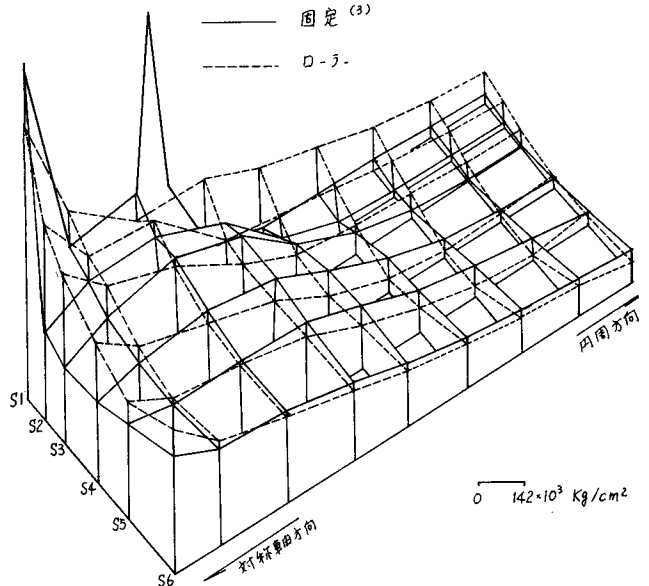


図3 ベアリング・プレートの Equivalent Stress $\bar{\sigma}$