

鹿島建設技術研究所 正会員 ○佐々木 猛

” 門間 関顕

” 杉岡 博史

拡散問題の一部として、熱伝導、浸透流の問題がある。著者等はこれらの問題を FEM の手法を用いて、定常、非定常について解析し、一応の成果が得られたので報告する。

(I) 基本式

伝熱の基本形式は(1)熱伝導、(2)対流熱伝導、(3)輻射熱伝導であるがここでは基本的には(1)について論ずることにし、境界条件として(2)も加味できる様にした。

最も一般的な三次元の熱伝導の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1.1}$$

である。ここに x, y, z : 三次元空間座標, k_x, k_y, k_z : x, y, z 方向の熱伝導率, T : 温度, \dot{q} : 単位体積あたりの発熱量, ρ : 密度, c : 比熱, t : 時間座標

定常の場合は、右辺の時間項がおちて

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = 0 \tag{1.2}$$

となり Poisson 型になる。更に(1.2)式の発熱量のない場合は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \tag{1.3}$$

となり、Laplace 型になる。

(II) 定常熱伝導解析

(1.2), (1.3)式の境界条件として、(i)境界上で温度が与えられる場合。(ii)境界上で放熱あるいは、吸熱量が与えられる場合。さて変分原理に従えば、系のエネルギー

$$X = \iiint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right\} - QT \right] dx dy dz + \int_c \dot{q} T ds \tag{2.1}$$

を最小にする様に T を定めれば良い。右辺の第 1 項は要素全領域にわたる積分であり、第 2 項は全境界面にわたる積分である。(2.1)式を最小にするには、代表的三角錐要素 e の節点を i, j, k, l とすれば領域全体の温度エネルギー X は節点温度の関数となる。

$$X = X(T_1, T_2, \dots, T_i, T_j, T_k, T_l, \dots, T_n) \tag{2.2}$$

$$\text{したがって、} X \text{ を最小にするため } \partial X / \partial T_p = 0 \quad (P = 1, 2, \dots, n) \tag{2.3}$$

の条件を満たせば良い。又 (Fig-1) の要素 e については(2.3)は

$$\sum_p \partial X_e / \partial T_p = 0 \quad (P = i, j, k, l) \tag{2.4}$$

となる。この式の意味は、 e 要素のエネルギーに関して、節点 P の最小化条件の (2.3) への寄与を表わしている。したがって (2.3) 式を具体的に書き下すには $\partial X^e / \partial T_P$ を評価しなければならない。ここで代表的な三角錐 (節点 i, j, k, l で構成されている) e 要素について書き下してみる。

要素内温度 T は節点温度 $\{T^e\}$ を使用して

$$T = \{N_i, N_j, N_k, N_l\} \{T^e\} \quad (2.5)$$

ここで N_i, N_j, N_k, N_l は要素内温度分布関数を

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (2.6)$$

としたとき

$$N_P = (\alpha_P + b_P x + c_P y + d_P z) / 6V \quad (P=i, j, k, l) \quad (2.7)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix}, \quad 6V = \det[A], \quad [A]^{-1} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_k & \alpha_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}$$

$x_i, y_i, z_i, x_j, \dots, z_l$: 節点座標 $\{T^e\}^T = \{T_i, T_j, T_k, T_l\}$: 節点温度

(2.4) 式の要素 e の第 i 点の寄与は

$$\frac{\partial X^e}{\partial T_i} = \iiint \left\{ k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) + k_z \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - Q \frac{\partial T}{\partial T_i} \right\} d_x d_y d_z \quad (2.9)$$

(2.4) 式の T を (2.5) 式で書きなおせば

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^e}{\partial T_i} &= \frac{1}{(6V)^2} \iiint \{ k_x [b_i, b_j, b_k, b_l] \{T^e\} b_i + k_y [c_i, c_j, c_k, c_l] \{T^e\} c_i \\ &+ k_z [d_i, d_j, d_k, d_l] \{T^e\} d_i - d_x d_y d_z - \frac{1}{6V} \iiint Q (\alpha_i + b_i x + c_i y + d_i z) d_x d_y d_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

同様に $\partial X^e / \partial T_i, \partial X^e / \partial T_k, \partial X^e / \partial T_l$ を求め

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial T} \right\}^e = \left\{ \frac{\partial X^e}{\partial T_i}, \frac{\partial X^e}{\partial T_j}, \frac{\partial X^e}{\partial T_k}, \frac{\partial X^e}{\partial T_l} \right\} \quad (2.11)$$

とかけ、結局要素 e に対しては

$$\left\{ \frac{\partial X}{\partial T} \right\}^e = [h] \{T^e\} + \{F\}^e \quad (2.12)$$

ここに $[h]$: 要素伝導マトリックス, $\{F\}^e = -Q V / 4 \{1, 1, 1, 1\}$

以上の要素の寄与を全領域にわたってよせ集めると

$$\frac{\partial X}{\partial T_i} = \sum h_{im} T_m + \sum F_i = 0 \quad i = 1 \sim n \text{ (節点数)} \quad m = \text{要素数} \quad (2.13)$$

となり n 元の連立方程式を解けば良い。(2.13) 式は最終的に $[K] \cdot \{T\} = -\{F\}$ (2.14)

となる。 $[K]$: 伝導マトリックス, $\{T\}$: 節点温度, $\{F\}$: 等価節点外力

(Ⅱ) 非定常熱伝導解析

三次元非定常の式は(1.1)式で示される様に定常と比較して $\rho c \partial T / \partial t$ の項が付加されるので、この項の影響だけ考慮すれば、大体の手順は同じであるが、時間軸を差分によって処理する。

この場合も、totalのエネルギーをあらわす汎関数は

$$X = \iiint \left\{ \frac{1}{2} \left[k_x \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] - \left[\left(Q - h_c \frac{\partial T}{\partial t} \right) T \right] \right\} d_x d_y d_z \quad (3.1)$$

となり右辺第1項は定常と同じであるので $\iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} T d_x d_y d_z$ についてのべると、 $\partial x / \partial T_i$ より

$$F_i^0 = \iiint \left[\rho c \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial T_i} \right] d_x d_y d_z \quad (3.2)$$

$$\text{ここに(2.5)式を代入すれば} \quad F_i^0 = \iiint \rho c (N) \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^e N_i d_x d_y d_z \quad (3.3)$$

が第*i*節点の寄与である。同様に要素の全節点の寄与を表示すれば

$$\{F^0\} = \left(\iiint c (N)^T (N) d_x d_y d_z \right) \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^e \quad (3.5)$$

$$\text{又は} \quad \{F^0\} = \{P\} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}^e \quad \text{ここに} \quad \{P\} = \iiint \rho c (N)^T (N) d_x d_y d_z \quad (3.6)$$

$$\text{したがって} \quad \frac{\partial X}{\partial T_i} = \Sigma \Sigma h_{im} T_m + \Sigma \Sigma P_{im} \frac{\partial T_m}{\partial t} + \Sigma F_i = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{マトリックス形で} \quad \{H\} \{T\} + \{P\} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + \{F\} = 0 \quad (3.8)$$

を解けばよい。出発値として温度分布が与えられた場合には、初期 slopeは(3.8)式より

$$-\{P\} \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_{t=0} = \{H\} \{T\}_{t=0} + \{F\} \quad (3.9)$$

今、 Δt 時間刻みの間に $\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}$ の値が時間とともに直線的に変化するものとすれば

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_t = - \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} + \left[\{T\}_t - \{T\}_{t-\Delta t} \right] \frac{2}{\Delta t} \quad (3.10)$$

となり、これを(3.8)式に代入して

$$\left(\{H\} + \frac{2}{\Delta t} \{P\} \right) \{T\}_t = \{P\} \left(\frac{2}{\Delta t} \{T\}_{t-\Delta t} + \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\}_{t-\Delta t} \right) - \{F\}_t \quad (3.11)$$

となり、これを順次解いてゆけばよい。つまり(3.10)式と(3.11)式とをくり返して解けばよい。

(Ⅳ) 数値解法

これらを解く場合には最終的に多元連立方程式を解くことになる。特に非定常問題では時間軸について、step-by-stepで解くため計算量が多くなるため、著者等は、係数matrixの対称性と、Band性を利用した能率よい解法を用いた。又時間刻み Δt をどの様に決定するかは、(3.11)式の右辺と左辺がほぼComparableになる様に決めるのが良い。

(Ⅴ) 他の問題への適応と解析例

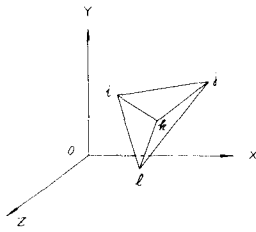
ここに述べられた(1.1),(1.2),(1.3)式に従う物理現象として浸透流の問題も熱の場合と全く同じものが使用できる。著者等は若干の例について解析したが、特に地下水等の問題を非定常として扱うのは興味ある問題である。又著者等が行った解析例についてFig-2はtankの隅角部の定常二次元温度分布の計算例を示す。Fig-3はtank内が-40℃の時の非定常温度分布で、Fig-4はtank内に100℃の流体が流れ、外は外気に接している時の計算例である。

(VI) おわりに

ここで取扱った拡散問題の FEM による一つのアプローチについては、種々の境界条件、内部発熱のある場合、任意形状、異方性、材質の違うものの組合せ、例えばインシュレーション等を考慮することができ非常に一般性があるが、工学的なパラメーターの決定、例えば熱伝達係数等には幅があり適切な値を見つけることが重要であり、実測値等により比較検討して行かなければならない。

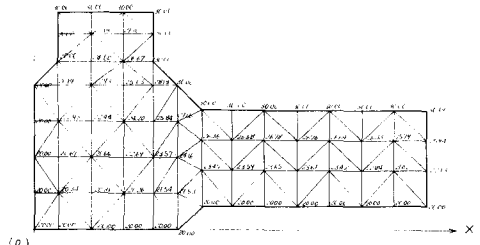
参考文献

- 1) J.P Holman : "heat transfer", McGraw - Hill (1963)
- 2) O.C.Zienkiewicz and Y.K. Cheung "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw - Hill (1967)

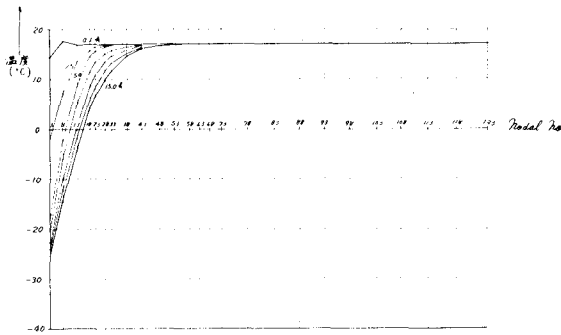


三次元要素図
Fig - 1

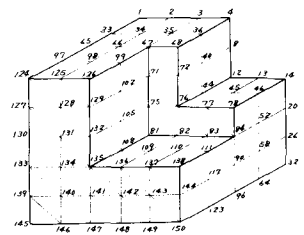
Temperature Distribution At Nodal Points



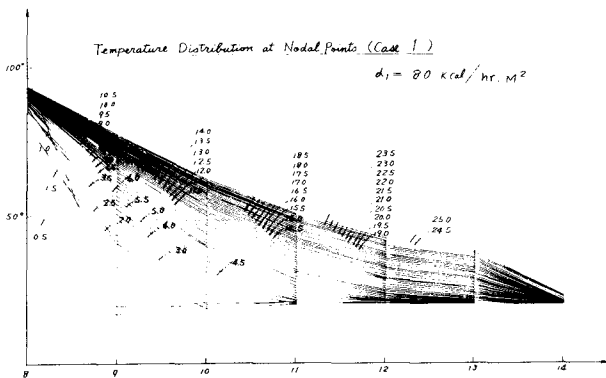
二次元定常モデル温度分布
Fig - 2



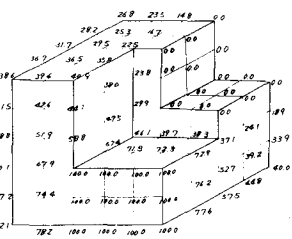
一次元非定常モデル温度分布
Fig - 3



三次元定常モデル
Fig - 5



二次元非定常モデル温度分布
Fig - 4



三次元定常モデル温度分布
Fig - 6