

I-150 有限要素法による初期値問題の一解法

早稲田大学 大学院 学生員 O 森 繁
全 上 内藤 泰
早稲田大学 理工学部 正員 堀井 健一郎

1. 緒 言

有限要素法は構造解析のみならず、浸透流、熱伝導、粘性流体などの非構造分野における現象の解析においても有力な手法と認められ、多くの研究がなされている。その場合、現象を記述する微分方程式の独立変数として、空間変数とともに時間変数も含まれる初期値問題となることがある。

初期値問題と有限要素法で解く場合、空間変数と時間変数とを分離して考え、空間変数に対しては有限要素法を適用し、時間変数のみに関する常微分方程式に変換して解析することが一般に行われており、菊池¹⁾は時間変数を差分に置き換えた方法により計算し解の安定性などについて数学的考察を試みている。しかし、波動や投波の伝播、非定常熱伝導などの場合、両独立変数を分離することが必ずしも適切でないことがあり、そのような場合に対処する方法が Argyris, Scharpf²⁾ などによって提案されている。

ここでは初期値問題の一例として一次元非定常熱伝導問題ととりあげ、空間変数と時間変数とともに含んだ有限要素法の定式化について述べ、さらに若干の数値計算例を示すことにする。

2. 解析理論

次のような初期値問題を扱う。

$$D_{ij}(x_\alpha, t)u_j = f_i \quad \dots\dots\dots 2.1$$

$$(L(t)u_i)_{t=0} = \hat{u}_i^{(n)}(0, x_j) \quad \dots\dots\dots 2.2$$

$$(u_i)_{x_\alpha = \bar{x}_\alpha} = \bar{u}_i(t, \bar{x}_\alpha) \quad \text{on } S_1 \quad \dots\dots\dots 2.3$$

ここで、 $D_{ij}(x, t)$ は空間変数 x_j , 時間変数 t に関する微分演算子とし、簡単のため線形演算子であるとする。 $L(t)$ は初期条件を表わす演算子で、時間変数 t のみの演算子であると考え、 $\hat{u}_i$ は与えられた初期値を表わし、(2.3) 式は物体の表面の一部 S_1 での境界条件を表わす。 $\bar{u}_i(t, \bar{x}_j)$ は与えられた境界値であり、簡単のため解析しようとする全時間にならって一定とする。 u_i は未知変数であり、 f_i は既知変数である。解を求めようとする領域を有限の副領域に分割し、時間についても有限個の時間区間に分割する。ここではこれを有限要素と呼ぶことにする。要素内の未知変数 u_i と、境界上の点(節点)で次のように表わされると仮定する。

$$u_i = \Phi_\alpha^n u_{\alpha i}^{(n)}(0) + \Psi_\alpha^n u_{\alpha i}^{(n)}(\tau) \quad \dots\dots\dots 2.4$$

ここで $u_{\alpha i}^{(n)}(0)$, $u_{\alpha i}^{(n)}(\tau)$ は時間 $t=0$, $t=\tau$ の時の節点での値であり、独立変数とする。

A は有限要素の節点総数、 $N \in L(t)$ の最大階数とすると、 $\alpha = 1, 2, \dots, A$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ $i = 1, 2, 3$ となる。 u_i の変分を δu_i と表わすことにすれば

$$\delta u_i = \Psi_\alpha^n \delta u_{\alpha i}^{(n)}(\tau) \quad \dots\dots\dots 2.5$$

(2.1) 式の両辺に δu_i を掛け要素全体積について変数 x_j で $0 \sim \tau$ 区間について変数 t で積分すれば

は次の関係が得られる。

$$\int_0^T \int_V \delta u_i D_{ij} u_j dV dt = \int_0^T \int_V \delta u_i f_i dV dt \quad \dots\dots\dots 2.6$$

(2.6)式に(2.5)式を代入して

$$\delta u_{\alpha i}^{(n)} \int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n D_{ij} u_j dV dt = \delta u_{\alpha i}^{(n)} \int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n f_i dV dt \quad \dots\dots\dots 2.7$$

(2.7)式は任意の $\delta u_{\alpha i}^{(n)}$ について成立すべきことから、次のように基礎方程式が得られる。

$$\int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n D_{ij} u_j dV dt = \Omega_{\alpha i}^n \quad \dots\dots\dots 2.8$$

さらに(2.8)式に(2.4)式を代入することにより次の解式が得られる。

$$K_{\alpha i \beta j}^{nm} u_{\beta j}^{(m)}(\tau) + H_{\alpha i \beta j}^{nm} u_{\beta j}^{(m)}(0) = \Omega_{\alpha i}^n \quad \dots\dots\dots 2.9$$

$$\text{こゝで } \Omega_{\alpha i}^n = \int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n f_i dV dt, K_{\alpha i \beta j}^{nm} = \int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n D_{ij} \bar{\Psi}_{\beta}^m dV dt, H_{\alpha i \beta j}^{nm} = \int_0^T \int_V \bar{\Psi}_{\alpha}^n D_{ij} \bar{\Phi}_{\beta}^m dV dt$$

$u_{\beta j}^{(m)}(\tau)$ および $u_{\beta j}^{(m)}(0)$ は $3 \times A \times N$ 個の変数を表わしているので、これと一次元行列に配列すれば $K_{\alpha i \beta j}^{nm}$ と $H_{\alpha i \beta j}^{nm}$ は二次元行列に配列することができ、(2.9)式は $3 \times A \times N$ 個の連立方程式を表わしていることになる。

3. 熱伝導問題の解式

セツ氏温度を θ ，時間変数を t ，空間変数を x で表わすことにすれば、一次元非定常熱伝導問題の偏微分方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots\dots 3.1$$

こゝに、 K は温度伝導率であり、熱伝導率 k ，定容比熱 c ，密度 ρ によって

$$K = \frac{k}{c\rho}$$

で与えられ、温度や場所に依存しない定数であると仮定する。

(図-1)に示される有限要素 $0 \sim \ell$ ， $0 \sim \tau$ に着目する。

(3.1)式に $\delta \theta$ を乗じ、要素全体について積分すると次のようなエネルギー方程式が得られる。

$$\int_0^T \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) \delta \theta dx dt = 0 \quad \dots\dots\dots 3.2$$

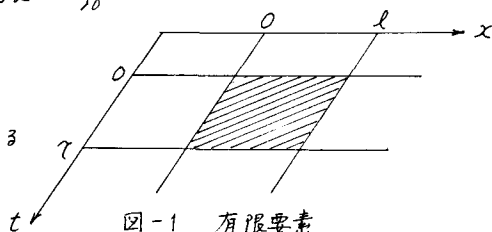
また、(3.2)式の左辺第二項を部分積分すると次式のようになる。

$$\int_0^T \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \delta \theta + K \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} \right) dx dt = \int_0^T \left[K \frac{\partial \theta}{\partial x} \delta \theta \right]_0^{\ell} dt \quad \dots\dots\dots 3.3$$

要素内の温度を次のように仮定する。

$$\theta = \bar{\Phi}_1 \theta_a(0) + \bar{\Phi}_2 \theta_b(0) + \bar{\Phi}_3 \theta_a(\tau) + \bar{\Phi}_4 \theta_b(\tau)$$

こゝに、添字 a, b はそれぞれ $x=0, x=\ell$ に対応する節点を表わし



$$\Phi_1 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \Phi_2 = \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), \Phi_3 = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{t}{\tau}, \Phi_4 = \frac{x}{\ell} \frac{t}{\tau}$$

である。上式を考慮して(3.3)式を整理すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\theta_a \int_0^\ell \int_0^\tau \left(\Phi_3 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \kappa \frac{\partial\Phi_3}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx dt + \delta\theta_b \int_0^\ell \int_0^\tau \left(\Phi_4 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \kappa \frac{\partial\Phi_4}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx dt \\ = \int_0^\tau \kappa \frac{\partial\theta(\ell, t)}{\partial x} \Phi_4(\ell, t) dt \delta\theta_b - \int_0^\tau \kappa \frac{\partial\theta(0, t)}{\partial x} \Phi_3(0, t) dt \delta\theta_a \quad \dots\dots\dots 3.4 \end{aligned}$$

ここで、(3.4)式の右辺第一項を $F_b \cdot \delta\theta_b$ 、第二項を $F_a \cdot \delta\theta_a$ と表わすことにすれば、 $\delta\theta_a$ と $\delta\theta_b$ の任意性より次の関係が得られる。

$$F_a = \int_0^\tau \int_0^\ell \left(\Phi_3 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \kappa \frac{\partial\Phi_3}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx dt, F_b = \int_0^\tau \int_0^\ell \left(\Phi_4 \frac{\partial\theta}{\partial t} + \kappa \frac{\partial\Phi_4}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right) dx dt \quad \dots\dots\dots 3.5$$

(3.5)式を整理して、行列表示すれば次式のようになる。

$$\{F^{(e)}\} = [H^{(e)} \mid K^{(e)}] \cdot \{\theta^{(e)}(0) \mid \theta^{(e)}(\tau)\}^T \quad \dots\dots\dots 3.6$$

ここに

$$\begin{aligned} \{F^{(e)}\} = \{F_a \mid F_b\}^T, \{\theta^{(e)}(0)\}^T = \{\theta_a(0), \theta_b(0)\}^T, \{\theta^{(e)}(\tau)\}^T = \{\theta_a(\tau), \theta_b(\tau)\}^T \\ [H^{(e)}] = \begin{bmatrix} -\frac{\ell}{6} + \kappa \frac{t}{6\ell} & -\frac{\ell}{12} - \kappa \frac{t}{6\ell} \\ -\frac{\ell}{12} - \kappa \frac{t}{6\ell} & -\frac{\ell}{6} + \kappa \frac{t}{6\ell} \end{bmatrix}, [K^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\ell}{6} + \kappa \frac{t}{3\ell} & \frac{\ell}{12} - \kappa \frac{t}{3\ell} \\ \frac{\ell}{12} - \kappa \frac{t}{3\ell} & \frac{\ell}{6} + \kappa \frac{t}{3\ell} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

以上の関係を構成全体で作製すれば、解式は次のようになる。

$$\{\theta(\tau)\} = [K]^{-1} \{ \{F\} - [H] \{\theta(0)\} \} \quad \dots\dots\dots 3.7$$

4. 数値計算例および考察

例-1 初期条件, $0 \leq x \leq 1^m$ で $\theta = 0^\circ C$

境界条件, $x = 1^m$ で $\theta = 0^\circ C$

$x = 0$ で単位熱力を与えた場合

例-2 初期条件, $0 < x \leq 1^m$ で $\theta = 0^\circ C$

境界条件, $x = 1^m$ で $\theta = 0^\circ C$

$x = 0$ で $\theta = 60^\circ C$

材料 : 鋼

熱伝導率: $k = 54 \text{ [kcal/h m } ^\circ C]$

比熱: $c = 0.107 \text{ [kcal/Kg } ^\circ C]$

密度: $\rho = 7850 \text{ [Kg/m}^3]$

例-1 では初期に $x = 0$ に近いところでは若干の振動現象がみられるが、これは要素内での温度分布を線形化したために生ずる計算誤差であると思われる。例-2 でも同様な現象が認められるが、これは上記の理由に加えて、境界条件が初期条件に対して不自然に変化しているため、例-1 以上に誤差が大きくなったものと考えられる。しかし x が大きいところでは、また、時間の経過とともに誤差は減少していることがわかる。現在、波動の伝播問題についても検討を行っている。

図-2 (例-1)

温度の時間的变化

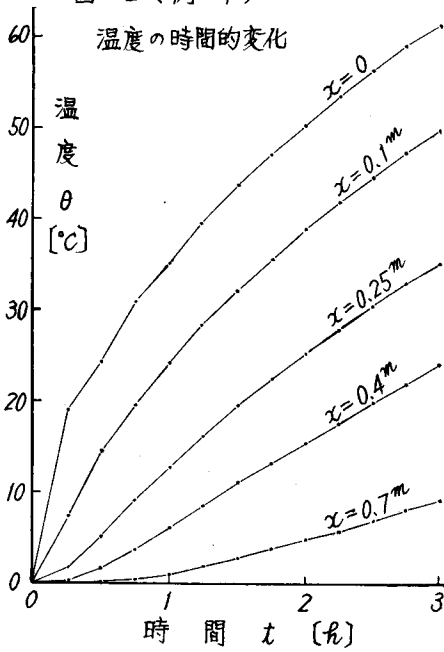


図-3 (例-1)

各時間の温度分布

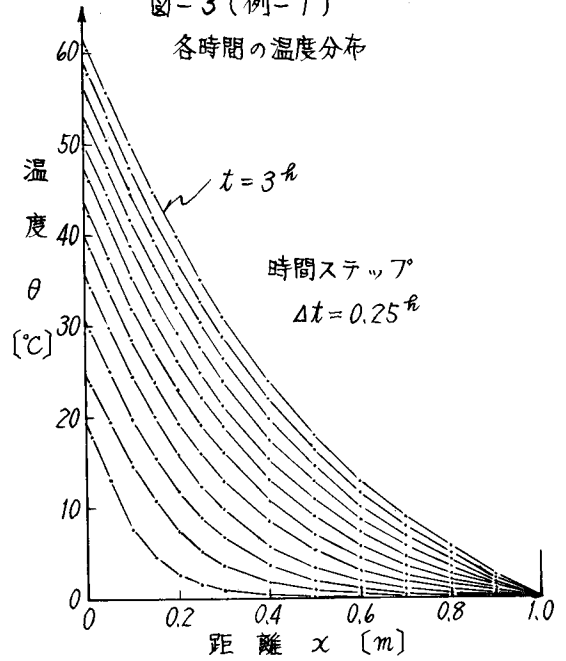


図-5 (例-2)

各時間の温度分布
(実線は解析解)

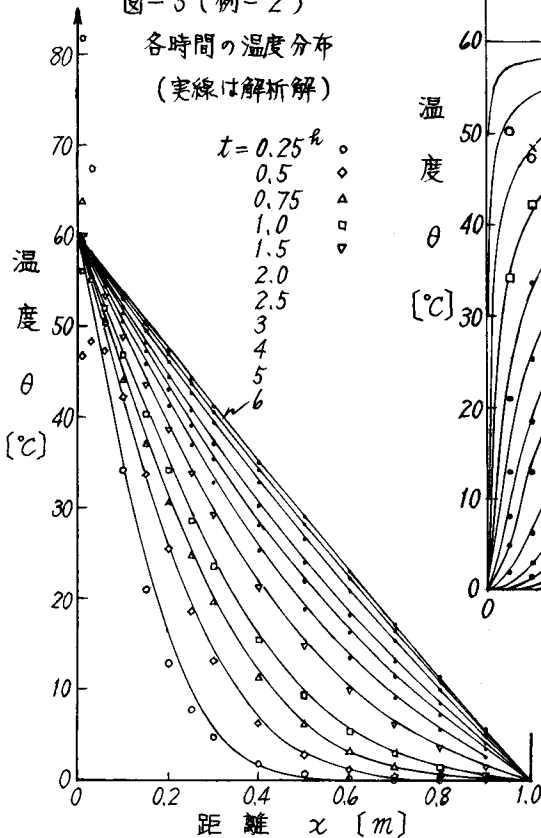
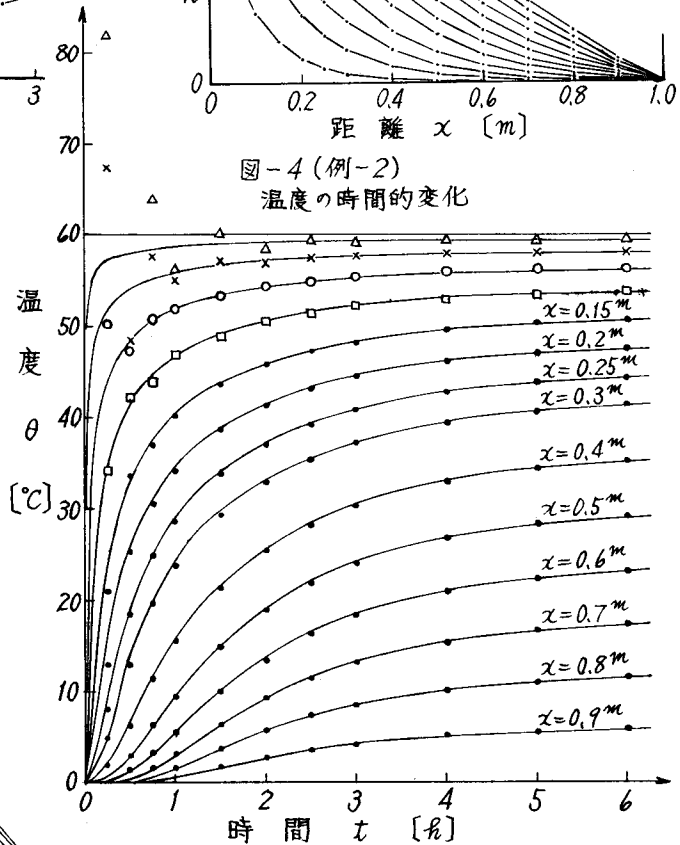


図-4 (例-2)

温度の時間的变化



- 1) 菊池文雄:「有限要素法による初期値問題の一解法 (理論および数値実験)」, 鋼構造協会構造解析小委員会資料, STAN-20-71, 1971.
- 2) Argyris, J.H. and Scharpf, D.W.: "Finite Element in Time and Space", Nuc. Eng. & Design 10, 1969.