

株式会社 ユニック 正員 〇川 原 睦 人
 株式会社 芙蓉情報センター 正員 佐 藤 義 一
 早稲田大学 理工学部 正員 堀 井 健一郎

1. 緒言

コンクリート、土質など、異った物質が混合して形成されている物体を微視的に観察すると、微小体積内においても等質でないと考えられる場合がある。このような物体を巨視的にとらえる場合、応力 (stress) の外に偶応力 (couple stress) を導入する、マイクロポーラ体の考え方がある。¹⁾ この理論では、変形の記述に、変位ベクトル u_i ($i=1, 2, 3$) の外に回転ベクトル ω_i ($i=1, 2, 3$) を導入する。回転ベクトルが、変位 u_i の勾配として与えられるとする first strain gradient theory に対しては、Oden, など²⁾ によって有限要素法の定式化が行なわれている。ここでは、回転ベクトル ω_i が変位ベクトル u_i とは独立に与えられる場合について、有限要素法の定式化を行うことを目的とする。

この論文では、簡単のため、変形は微小であるとし、線型の場合と扱うことにする。

2. 平衡方程式

任意の微小な物体内の体素 dV に着目し、その表面力を P_i 、表面モーメントを m_i と表わすことにする。物体力を ρX_i 、物体モーメントを ρY_i と表わす。体素 dV およびその表面 dS における力とモーメントの平衡方程式は次のごとくである。

$$\int_S P_i dS + \int_V \rho X_i dV = 0 \quad \text{----- 2.1}$$

$$\int_S (\varepsilon_{ijk} r_j P_k + m_i) dS + \int_V \rho (\varepsilon_{ijk} r_j X_k + Y_i) dV = 0 \quad \text{----- 2.2}$$

ここに、 ρ は密度、 r_j は位置ベクトルである。 ε_{ijk} は交代記号を表わしている。表面 S にわたる、外向き単位法線ベクトルの成分を n_j とすれば、 P_i, m_i はそれぞれ応力 σ_{ij} 、偶応力 μ_{ij} と次の関係で結ばれている。

$$P_i = \sigma_{ji} n_j \quad \text{----- 2.3}$$

$$m_i = \mu_{ji} n_j \quad \text{----- 2.4}$$

(2.1) 式, (2.2) 式に, (2.3) 式, (2.4) 式を代入し, Green-Gauss の定理を用いて表面積分を体積分に変換し, 任意の体素について成立すべきことを考えると, 応力ならびに偶応力に関する平衡方程式が (2.5), (2.6) 式のごとくに得られる。

$$\sigma_{ji,j} + \rho X_i = 0 \quad \text{-----} \quad 2.4$$

$$\varepsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + \rho Y_i = 0 \quad \text{-----} \quad 2.5$$

単位質量当りの内部エネルギーを e と表わすと,

$$\int_V \rho \dot{e} dV = \int_V (\rho X_i \dot{u}_i + \rho Y_i \dot{\omega}_i) dV + \int_S (P_i \dot{u}_i + m_i \dot{\omega}_i) dS \quad \text{-----} \quad 2.6$$

である。ここに、 u_i, ω_i はそれぞれ、変位ベクトル、回転ベクトルの成分である。

(2.3), (2.4) 式と (2.6) 式に代入し、Green-Gauss の定理によって、表面積分と体積分に変換し、応力、偶応力に関する平衡方程式 (2.4), (2.5) 式を用いて整理すると結局次の関係を得ることができる。

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ji} (\dot{u}_{ij} - \varepsilon_{kji} \dot{\omega}_k) + \mu_{ji} \dot{\omega}_{ij} \quad \text{-----} \quad 2.7$$

いまここで、

$$\delta_{ji} = u_{i,j} - \varepsilon_{kji} \omega_k \quad \text{-----} \quad 2.8$$

$$\eta_{ji} = \omega_{ij} \quad \text{-----} \quad 2.9$$

と置くことにすれば、(2.7) 式は、

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ji} \dot{\delta}_{ji} + \mu_{ji} \dot{\eta}_{ji} \quad \text{-----} \quad 2.10$$

となる。よって、 δ_{ji}, η_{ji} は応力 σ_{ji} 、偶応力 μ_{ji} に対応する変形の表示となり、それぞれひずみテンソル、曲率テンソルと呼ばれている。(2.10) 式と (2.6) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ji} \dot{\delta}_{ji} + \mu_{ji} \dot{\eta}_{ji}) dV \\ = \int_V (\rho X_i \dot{u}_i + \rho Y_i \dot{\omega}_i) dV + \int_S (P_i \dot{u}_i + m_i \dot{\omega}_i) dS \end{aligned} \quad \text{-----} \quad 2.11$$

と変形される。

3. 構成方程式

線型弾性体の場合について構成方程式を考える。内部エネルギーが、 δ_{ji}, η_{ji} のみの関数であるとする。

$$e = e(\delta_{ji}, \eta_{ji}) \quad \text{-----} \quad 3.1$$

(3.1) 式によって、内部エネルギー増分 $\rho \dot{e}$ は次のように表わすことができる。
すなわち、

$$\rho \dot{u} = \rho \frac{\partial u}{\partial x_{ji}} \cdot \dot{x}_{ji} + \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{ji}} \cdot \dot{\pi}_{ji} \quad \text{----- 3.2}$$

よって,

$$\sigma_{ji} = \rho \frac{\partial u}{\partial \delta_{ji}} \quad \text{----- 3.3}$$

$$\mu_{ji} = \rho \frac{\partial u}{\partial \pi_{ji}} \quad \text{----- 3.4}$$

である。等方性を仮定し、内部エネルギーを次のように表わす。

$$\begin{aligned} \rho u = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{2} \delta_{ii} \delta_{jj} + \mu \delta_{\langle ij \rangle} \delta_{\langle ij \rangle} - \alpha \delta_{\langle ij \rangle} \delta_{\langle ij \rangle} \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta}{2} \pi_{ii} \pi_{jj} + \gamma \pi_{\langle ij \rangle} \pi_{\langle ij \rangle} - \varepsilon \pi_{\langle ij \rangle} \pi_{\langle ij \rangle} \end{aligned} \quad \text{----- 3.5}$$

ここに,

$$\delta_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} (\delta_{ji} + \delta_{ij}), \quad \pi_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} (\pi_{ij} + \pi_{ji}), \quad \delta_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} (\delta_{ji} + \delta_{ij}), \quad \pi_{\langle ij \rangle} = \frac{1}{2} (\pi_{ij} + \pi_{ji})$$

である。(3.5) 式より (3.3), (3.4) 式は次のように表わされる。

$$\sigma_{ji} = E_{jiek} \cdot \delta_{ek}, \quad \mu_{ji} = M_{jiek} \cdot \pi_{ek} \quad \text{----- 3.6}$$

$$E_{jiek} = [(\mu + \alpha) \delta_{je} \delta_{ik} + (\mu - \alpha) \delta_{ie} \delta_{jk} + \lambda \delta_{ij} \delta_{ke}]$$

$$M_{jiek} = [(\gamma + \varepsilon) \delta_{je} \delta_{ik} + (\gamma - \varepsilon) \delta_{ie} \delta_{jk} + \beta \delta_{ij} \delta_{ke}]$$

4. 有限要素法の適用

解析する連続体を任意の有限要素に分割し、要素内の u_i, w_i を要素節点の変位 $u_{\alpha i}, w_{\alpha i}$ によって次のごとく表わす。

$$u_i = \Phi_{\alpha} u_{\alpha i} \quad \text{----- 4.1}$$

$$w_i = \Phi_{\alpha} w_{\alpha i} \quad \text{----- 4.2}$$

(2.8), (2.9), (2.11), (3.6) 式に (4.1), (4.2) 式を代入すれば次の解式が得られる。

$$K_{\alpha\beta j} \cdot u_{\beta j} + H_{\alpha\beta j} \cdot w_{\beta j} = \Omega_{\alpha i} \quad \text{----- 4.3}$$

$$H_{\beta\alpha i} \cdot u_{\beta j} + N_{\alpha\beta j} \cdot w_{\beta j} = \Gamma_{\alpha i} \quad \text{----- 4.4}$$

$$K_{\alpha\beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha, l} E_{lijk} \cdot \Phi_{\beta, k}) dV$$

$$H_{\alpha\beta j} = - \int_V (\Phi_{\alpha, l} \delta_{ik} E_{lknm} \varepsilon_{jmn} \Phi_{\beta}) dV$$

$$N_{\alpha\beta j} = \int_V (\Phi_{\alpha} \varepsilon_{lmn} E_{mnek} \varepsilon_{jkl} \Phi_{\beta} + \Phi_{\alpha, l} M_{lijk} \Phi_{\beta, k}) dV$$

$$\Omega_{\alpha i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \rho x_i) dV + \int_S (\Phi_{\alpha} p_i) dS, \quad \Gamma_{\alpha i} = \int_V (\Phi_{\alpha} \rho \dot{x}_i) dV + \int_S (\Phi_{\alpha} m_i) dS$$

5. 数値計算例

左図のごとき簡単な構造に適用した計算例題を示す。

有限要素として、三角形要素を用い、形状関数として、要素内でひずみが一定となる、面積座標による形状関数を用いている。

(3.6)式において、 μ, λ はラメの定数であり $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ がそれぞれ、マイクロポラ体であるがために加わった定数である。平面問題の場合には、 β は関係がなくなり、また $\varepsilon = 0$ とする。

$\alpha = 0$ とすれば、変位 u と回転 ω は分離し、通常の弾性体の場合と一致する。

$$\lambda = 1.2 \times 10^4 \text{ t/m}^2$$

$$\mu = 1.0 \times 10^3 \text{ t/m}^2$$

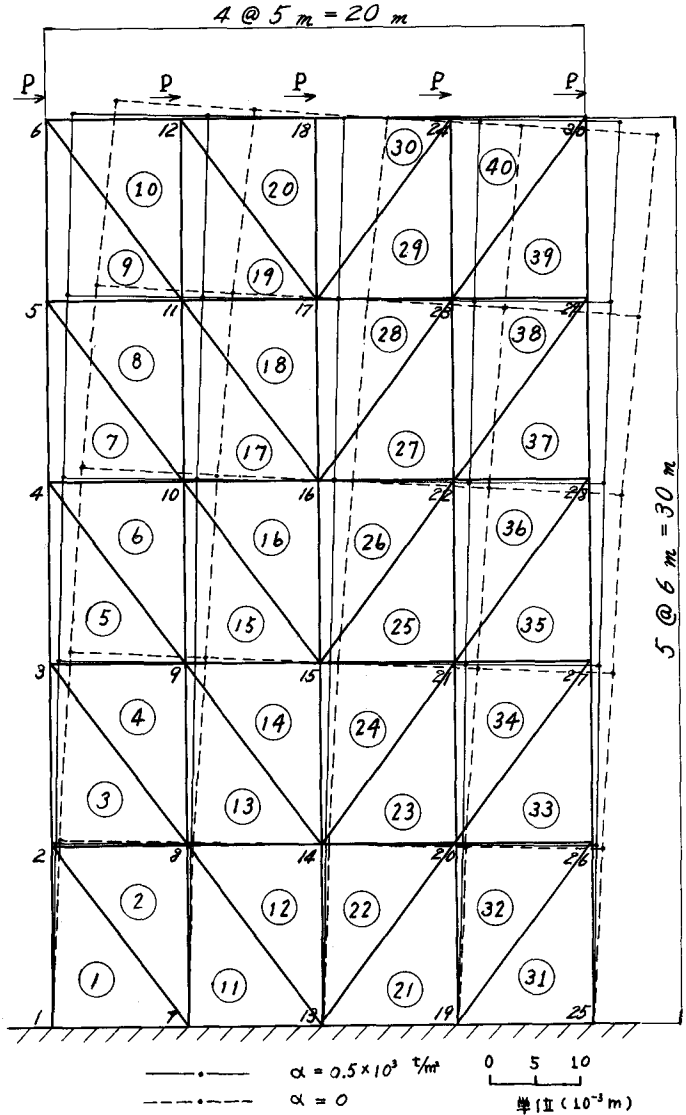
$$\gamma = 1.0 \times 10^3 \text{ t/m}^2$$

とし、 $\alpha = 0$ の場合と

$$\alpha = 0.5 \times 10^3 \text{ t/m}^2$$

の場合の変位を、また α を変化した場合の変位の変化を表に示す。

水平荷重の場合、 α の変化によって変位の値が大幅に変化するが、垂直荷重ではほとんど変化がない。



荷重	$\alpha = 0$ [t/m ²]		$\alpha = 125$ [t/m ²]		$\alpha = 250$ [t/m ²]		$\alpha = 500$ [t/m ²]	
	X [m]	Y [m]	X [m]	Y [m]	X [m]	Y [m]	X [m]	Y [m]
水平	7.679 $\times 10^{-3}$	2.163 $\times 10^{-3}$	4.943 $\times 10^{-3}$	1.068 $\times 10^{-3}$	3.852 $\times 10^{-3}$	6.940 $\times 10^{-4}$	2.760 $\times 10^{-3}$	2.691 $\times 10^{-4}$
垂直	2.910 $\times 10^{-7}$	8.281 $\times 10^{-3}$	2.433 $\times 10^{-7}$	8.247 $\times 10^{-3}$	3.487 $\times 10^{-7}$	8.222 $\times 10^{-3}$	3.271 $\times 10^{-7}$	8.176 $\times 10^{-3}$

$$\lambda = 1.2 \frac{\text{t}}{\text{m}^2} \quad \mu = 1.0 \times 10^3 \frac{\text{t}}{\text{m}^2} \quad \gamma = 1.0 \times 10^3 \frac{\text{t}}{\text{m}^2}$$

- 1). Eringen, C.: "Theory of micro-polar Elasticity", Fracture Vol. 2, Academic Press, 1968
- 2). Oden, et al.: "On the numerical Solution of a Class of Problem in a linear First Strain Gradient Theory of Elasticity", Int. J. Num. Meth. Eng. Vol. 2, 1970