

兵庫県土木部 正員 ○ 前田昌俊
神戸大学 正員 松井春輔

1. まえがき

筆者らは先に幾何学的非線形問題に有限要素法を適用する場合の各種計算法について、弾性変形に限定して若干の考察を行なった¹⁾。しかし、大変形の場合は一般的には塑性変形を伴うと考えられ、したがって、材料の非線形性も同時に考慮に入れなければならない。その場合の解析方法としては荷重増分法が最も適していると思われる。したがってここでは、増分法により有孔無限板を対象として解析を行い、幾何学的非線形性と材料非線形性について考察を加えることを目的とする。なお、弾性変形に限定した幾何学的非線形問題に対してもさらに若干の考察を加える。

2. 解析方法に対する考察

増分法による場合、荷重増分を適当に小さくとることにより、ひずみ増分を微小にすることが可能であり、したがってひずみ-変位関係式 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$ の非線形の項は一般的に省略することができる。すなわち、線形方程式に帰着できる。幾何学的非線形性を考慮した場合の剛性方程式は平面問題に對しつぎのようになる²⁾。

$$(K_{ij}^{(q)} + K_{ij}) \Delta u_j = \Delta f_i + \varepsilon_i \quad (1)$$

ここで $K_{ij}^{(q)} = \int_V \phi_{i,n,k} \sigma_{k\ell}^{(0)} \phi_{j,n,\ell} dV$, $K_{ij} = \frac{1}{4} \int_V (\phi_{i,k,\ell} + \phi_{i,\ell,k}) C_{k\ell mn} (\phi_{j,m,n} + \phi_{j,n,m}) dV$

$$\Delta f_i = \int_S \Delta T_k \phi_{i,k} dS, \quad \varepsilon_i = \int_S T_k^{(0)} \phi_{i,k} dS - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{k\ell}^{(0)} (\phi_{i,k,\ell} + \phi_{i,\ell,k}) dV$$

$\sigma_{ij}^{(0)}$ は真応力, $\phi_{i,k}$ は形状関数, $T_k^{(0)}$ は構造物表面に作用する表面力である。ただし物体力は省略してある。ここで K_{ij} は微小変形理論で求まる通常の増分剛性マトリックスであり、 $K_{ij}^{(q)}$ は幾何学的増分剛性マトリックスである。なお、応力-ひずみ関係は $\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}$ と仮定している。ここで σ_{ij} は Kirchhoff の応力である。($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \Delta \sigma_{ij}$)。また ε_i は補正項であり、前段階における不釣り合いを表わしている。このような補正項を導入することにより各段階において、くり返し計算をすることなく精度を上げることができる。

一方、降伏条件は図-1に示すような Coulomb の条件式を考え、この条件を満足する要素においてはヤング係数、およびポアソン比を変化させることにする。

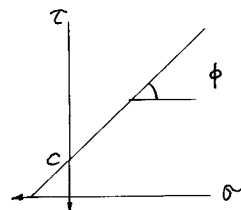


図-1 降伏条件

3. 計算例

三角形要素に対して形状関数を線形と仮定する。(1)式の $K_{ij}^{(q)}$ および補正項 ε_i の影響を調べるために片持梁について弾性計算を行なう。先端の鉛直方向の変位を図-2および図-3に示す。図より明らかなように $K_{ij}^{(q)}$ は無視することができない。また補正項を考慮しても荷重増分を小さくすれば変位はさらに小さくなる傾向にあり、結局、荷重増分が最も問題となりそうである。なお、図において応力状態とは $K_{ij}^{(q)}$ の計算に用いた応力を表わしている。すなわち、Kirchhoff の応力を用いるのは近似的である。

つぎに、有孔無限板の弾塑性解析を行なう。図-5にモデルの1/4を示す。また降伏条件として $\phi=45^\circ$ $C=30 \text{ kg/cm}^2$ とし、ヤング係数 $E=10000 \text{ kg/cm}^2$ ポアソン比 $\nu=0.2$ とし降伏した要素のそれぞれを $E_2=500 \text{ kg/cm}^2$ $\nu=0.2$ とする。鉛直荷重と水平荷重の割合は図のとおりである。降伏を起こす要素の順序は図-5に番号で示す。その場合の円孔周辺の変位をプロットしたのが図-4である。図から明らかになように微小変形理論による結果と大差ないことがわかる。

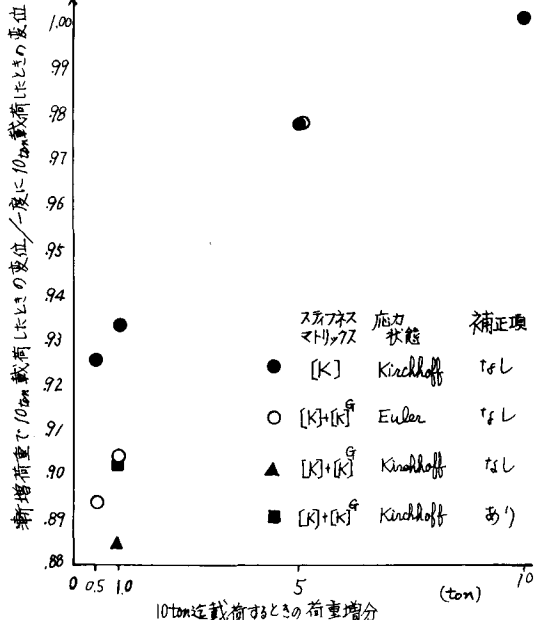


図-2 片持梁先端の鉛直方向の変位

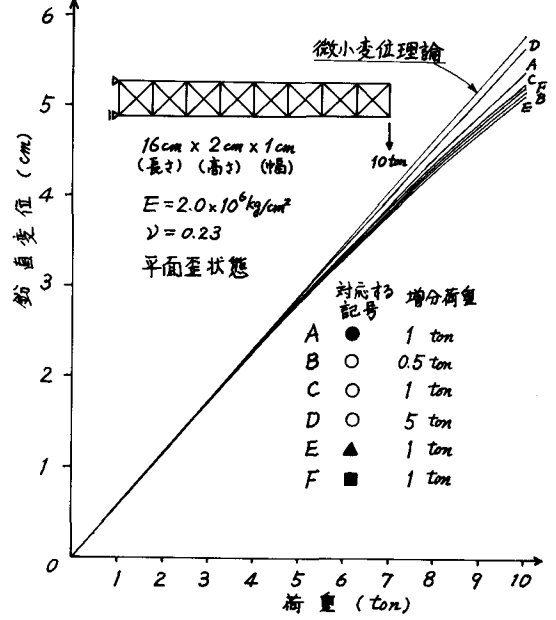


図-3 片持梁先端の鉛直方向の変位

つぎに、初期応力の作用している板に円孔を設けた場合の解析においては、円孔周辺に最初に作用している力と逆向きの力を加えることにより解析するのが合理的である。

この場合の解析結果は講演会当日発表予定である。

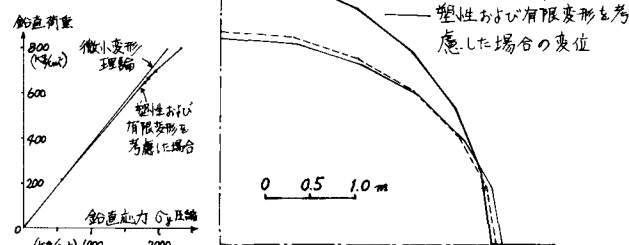


図-4 円孔周辺の増位

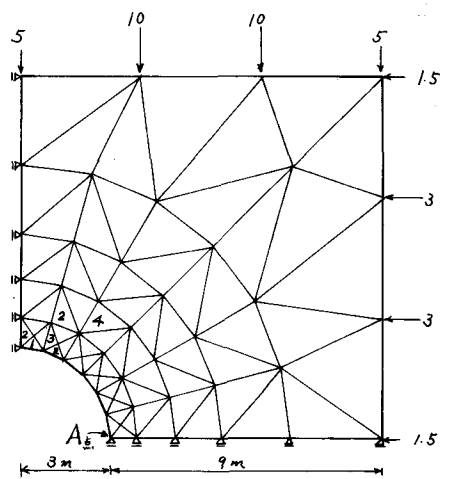


図-5 有孔無限板モデル

- 1: $P_v=218.8 \text{ kg}$ $P_h=65.6 \text{ kg}$ のとき降伏
- 2: $P_v=656.2 \text{ kg}$ $P_h=196.9 \text{ kg}$ のとき降伏
- 3: $P_v=666.7 \text{ kg}$ $P_h=200.1 \text{ kg}$ のとき降伏
- 4: $P_v=697.2 \text{ kg}$ $P_h=209.1 \text{ kg}$ のとき降伏

参考文献

- (1) 前田, 桜井: 有限変形問題に対する有限要素法の適用について, 昭和44年度土木学会関西支部講演概要
- (2) L.D. Hoffmeister: AIAA / ASME 11th Structures, Structural Dynamics & Material Conference 1970