

I-146 弾塑性問題の解析法に関する一考察

日本鋼管株式会社 正員 ○ 小杉 博孝
早稲田大学 大学院 学生員 板橋 啓治
早稲田大学 理工学部 正員 堀井 健一郎

1. 緒言

型性化された領域を考慮した構造物の弾塑性解析を行うにあたって、いわゆる型性流れ理論に基づいた Plandtl-Reuss の構成方程式を用いて増分法による解式を組み立てるのが有効な方法である。

こゝでは有限要素法を用いて要素の剛性行列と求めるのに変位法を用いる。その際、要素内の型性領域についての積分は、応力や断面形状等に依存するきわめて複雑な様相を呈する。従って著者等は、この難点を解消するために、要素をさらに立体的に細分割して、その微小要素内で応力を一定と仮定して型性流れ理論を適用することにした。これによって最終的には連立方程式の元数を増加する必要なしに型性域の発達を追跡することができる。こゝではこの解析法を平面骨組および板の曲げの解析に適用してみた結果について述べる。また平面骨組の場合には、変位-ひずみ関係式の非線形項と考慮した場合についても検討してみた。

2. 構成方程式

型性流れ理論に基づく Plandtl-Reuss の構成方程式は次のように与えられる。

$$d\sigma_{ij} = E_{ijmn} \left(d\epsilon_{mn} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\lambda \right) \quad \dots\dots\dots 2.1$$

こゝに f は降伏関数である。また降伏状態では次式が成立する。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} d\epsilon_{mn} + A d\lambda = 0 \quad \dots\dots\dots 2.2$$

(2.1), (2.2) 式は平面骨組の場合には (2.3) 式のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -\frac{2}{3}E\bar{\sigma}_x \\ -\frac{2}{3}E\bar{\sigma}_x & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 2.3$$

$$\text{こゝに } A = \frac{4}{9}(E + H')\bar{\sigma}^2, \quad H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\epsilon_p}, \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2$$

また板の曲げの場合には (2.4) 式のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & -\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma'_x + \nu\sigma'_y) \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & -\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma'_y + \nu\sigma'_x) \\ 0 & 0 & G & -2G\tau'_{xy} \\ -\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma'_x + \nu\sigma'_y) & -\frac{E}{1-\nu^2}(\sigma'_y + \nu\sigma'_x) & -2G\tau'_{xy} & A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\gamma_{xy} \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots 2.4$$

$$\text{こゝに } A = \frac{E}{1-\nu^2}(\sigma_x'^2 + 2\nu\sigma'_x\sigma'_y + \sigma_y'^2) + 4G\tau_{xy}^2 + \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H'$$

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

3. 仮想仕事の方程式

変形条件式を求めるための仮想仕事の方程式は一般には次のように表わされる。

$$\int_V \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_S P_i \delta U_i dS \quad \dots\dots\dots 3.1$$

増分形の仮想仕事の方程式は微小変形・微小ひずみ理論では (3.1) 式をそのまま増分形とした次式

$$\int_V d\delta \epsilon_{ij} \delta d\epsilon_{ij} dV = \int_S dP_i \delta dU_i dS \quad \dots\dots\dots 3.2$$

で与えられる。しかし変位・ひずみ関係式の非線形項を考慮したいわゆる有限ひずみ問題の場合には (3.2) 式は成立しない。有限ひずみの場合の増分形仮想仕事の方程式は、次の釣合方程式

$$(X_{k,K} \delta \epsilon_{KL})_{,L} + P_{,K} X_K = 0 \quad \dots\dots\dots 3.3$$

から求めることができる。すなわち変形前の状態で記述すれば

$$\int_{V_0} \{ d\delta \epsilon_{KL} \delta d\epsilon_{KL} + \delta \epsilon_{K,N,L} \delta dU_{N,K} \} dV_0 = \int_{V_0} dF_K \delta dU_K dV_0 + \int_{A_0} dP_K \delta dU_K dA_0 \quad \dots\dots\dots 3.4$$

と表わされる。

4. 変位ひずみ方程式

変位とひずみとの関係は (Fig. 1) のように座標系を定めると、平面骨組の場合には、微小変形・微小ひずみ理論では

$$d\epsilon_N = \frac{\partial dw_0}{\partial z} \quad \dots\dots\dots 4.1$$

$$d\chi = -\frac{\partial^2 dv_0}{\partial z^2} \quad \dots\dots\dots 4.2$$

と定義される。また (4.1) 式は二次項を考慮すると

$$d\epsilon_N = \frac{\partial dw_0}{\partial z} + \frac{\partial dw_0}{\partial z} \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{\partial dv_0}{\partial z} \frac{\partial v_0}{\partial z}$$

のように示される。ここで上式の右辺第二項は無視できるとすると

$$d\epsilon_N = \frac{\partial dw_0}{\partial z} + \frac{\partial dv_0}{\partial z} \frac{\partial v_0}{\partial z} \quad \dots\dots\dots 4.3$$

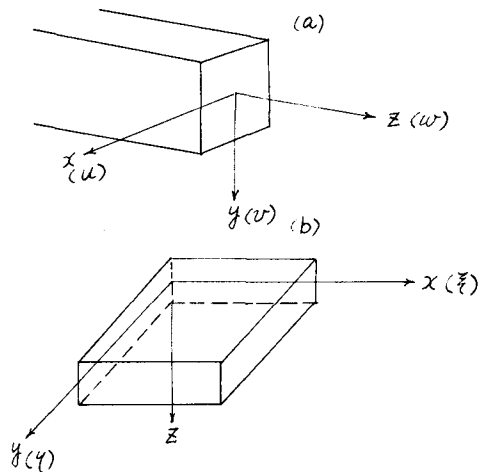
と定義できる。要素内の変位分布は次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} dw_0 &= \frac{l-z}{l} dw_a + \frac{z}{l} dw_b \\ dv_0 &= \left(1-3\frac{z^2}{l^2} + 2\frac{z^3}{l^3} \right) dv_a + \left(3\frac{z^2}{l^2} - 2\frac{z^3}{l^3} \right) dv_b + \left(z-2\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right) d\theta_a + \left(-\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2} \right) d\theta_b \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots 4.4$$

板の曲げの場合には要素内におけるたわみの分布を次のように仮定する。

$$\begin{aligned} dw &= \{ 1, z, z^2, z^3, yz, y^2, z^3, z^2y, zy^2, y^3, z^3y, z^2y^2, zy^3, y^3y^2, y^3y^3 \} \\ &\times \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots\dots\dots, \alpha_{16} \}^T \quad \dots\dots\dots 4.5 \end{aligned}$$

Fig. 1 座標系



こゝに $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ である。

微小変形・微小ひずみ理論では、変位と曲率との関係および曲率とひずみとの関係は次のように与えられる。

$$dX_x = -\frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} , \quad dX_y = -\frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} , \quad dX_{xy} = -2 \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \quad \dots\dots\dots 4.6$$

$$d\epsilon_x = z \cdot dX_x , \quad d\epsilon_y = z \cdot dX_y , \quad d\gamma_{xy} = z \cdot dX_{xy} \quad \dots\dots\dots 4.7$$

こゝに z は中立面からの高さである。

5. 変形条件式

以上のことから (3.2) 式' に (2.3), (4.1), (4.2) 式' あるいは (2.4), (4.5), (4.6), (4.7) 式' を、(3.4) 式' に (2.3), (4.2), (4.3) 式' を代入することにより、各々の場合についての変形条件式が次のように求められる。

$$\{dF\} = (\{K\} + \{K_q\} + \{K_p\})\{dU\} \quad \dots\dots\dots 5.1$$

こゝに $\{dF\}$ は部材力増分、 $\{dU\}$ は変位増分、 $\{K\}$, $\{K_q\}$, $\{K_p\}$ は各々断面諸量によって定まる弾性時の通常の剛性行列、有限ひずみを考慮することによって生ずる幾何学的剛性行列、型性化による剛性の低下を表わす行列をそれぞれ示している。微小変形の場合には (5.1) 式' における $\{K_q\}$ は 0 である。(5.1) 式' を用いて各荷重段階における解式を組立てる。

6. 数値計算例

上述の解析法を平面骨組に対する一例として両端固定ばりの $1/4$ 点に集中荷重を載荷する場合に適用し、解析解との比較を行った。変位-ひずみ関係式の非線形項を考慮した場合には、上田・松石³⁾ などによって提案された型性流れ理論にもとづく型性ヒンジと考へた解析法と比較してみた。この場合、微小変形の場合とくらべて型性崩壊荷重は約 10% 上昇している。

平板の曲げの一例として等分布荷重をうける周辺固定の正方形板に適用してみた。板の形状および荷重の対称性から、板の四半分について解析した。計算モデルを 2×2 の要素に分割し、各要素はさらに x, y 方向に 5 等分、 z 方向に 10 等分に再分割した。荷重は初期荷重として弾性限荷重を与え、それ以後初期荷重の 2.5 ~ 10% 程度の荷重増分を与えた。要素内のたわみ分布と示す変位関数は多種類あるが、弾型性問題のように応力と変位とする場合に有効なものは少いようである。

こゝで用いた変位関数の仮定は、変位に関して三次項まで考慮に入れた関数を用いている。この変位関数は、変位、たわみ角、およびねじり率を節点の未知数としており、要素内におけるモーメントの分布も許容されるものであると考える。

参考文献

1. 山田嘉明 型性力学 日刊工業新聞
2. 堀井・川原 立体骨組構造の弾型性解析 第16回 橋梁構造工学研究発表会
3. 上田・松石 マトリックス法による骨組構造の弾型性解析 JSSC, マトリックス構造解析講演論文集 S-46.6
4. 溝田・川原・堀井 有限要素法による有限変形増分解析の相互関係について 第26回土学会年次学術講演会講演集
5. 成岡・梶田 変断面長方形板の曲げおよび振動に対する有限要素法の応用 土学会論文報告集 No. 161

Fig 2 荷重-たわみ曲線
(a)

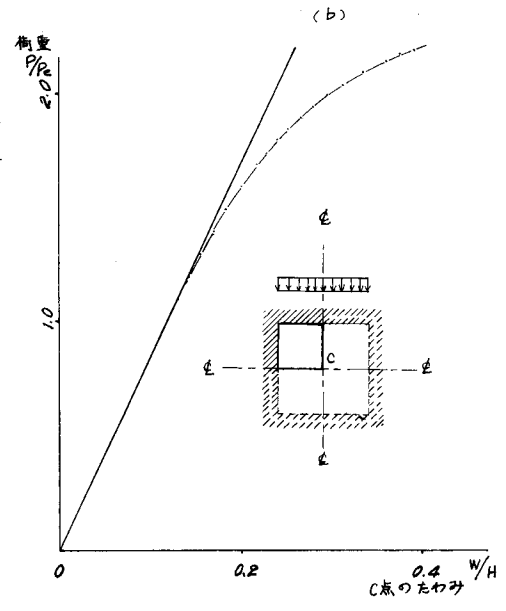
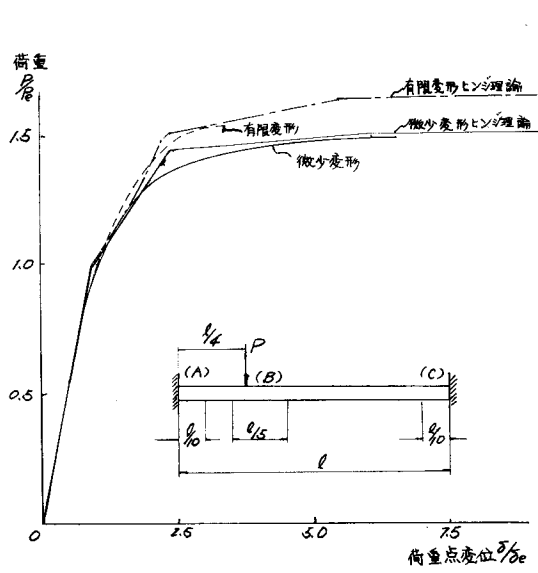


Fig-3 塑性領域

