

名古屋大学工学部 正員 川本 龍 万

○ 中部電力総合技研 正員 宮池 克 人

1. はじめに

土, コンクリート, 岩盤などの材料は, 応力-ひずみ関係が線型とみなせる領域は少なく, 実際の状態はほとんど非線形型である。鋼材のように材料の性質がほぼ一定で, 線型, 非線型領域での挙動が明らかとなっているものについては, 材料の非線形性と有限要素法に容易に導入でき, 結果の信頼性もある。しかし, 土, コンクリート, 岩盤などの材料では, 材料の性質が一定でなく, 応力状態によってかなり異なった挙動を示すので, それぞれ材料の性質が正しく解析に導入されていないと, 実際とは異なった結果が得られる可能性がある。このような材料の応力解析に有限要素解析法と適用する場合, 大別して次の2つの方法がある。すなわち, 材料の非線形性と実験より求め, この結果を用いて非線形解析を行なうものと, 塑性論にもとづき塑性域での応力-ひずみ関係を誘導し, これを用いて弾塑性解析を行なうものがある。本稿は, 実験より求められた材料の応力-ひずみ関係の数式表示を試み, これを用いた非線形解析の結果と, 塑性論に基づき誘導された弾塑性マトリックスを用いる初期応力法による解析結果と比較検討し, さらに, 数式表示された応力-ひずみ関係を用いる解析法の解の精度と高めるため誘導した修正荷重漸増法について述べたものである。

2. 土, モルタルのような材料の応力-ひずみ関係の数式表示

このような材料の応力-ひずみ関係は応力状態によって変化するため, 従来, 平均主応力, 最小主応力, 最大最小主応力比などとパラメータとして実験結果が整理され, 図示されている。このような応力-ひずみ関係の数式化は, 有限要素解析と適用する上で考慮されねばならないことである。(1) 本らは, モルタル, 大理石および片麻岩に対して行なった純三軸圧縮試験の結果から, 応力-ひずみ関係として主応力差の半分 $\sigma = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ と主ひずみ差 $\epsilon = (\epsilon_1 - \epsilon_3)$ との関係を考え, 平均主応力 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ をパラメータとして, Griffith 理論を用いた Mohr の破壊条件式 $\tau^2 = 4\sigma_c(\sigma_c - \sigma)$ を用い, 応力-ひずみ関係を数式表示している。²⁾

一方, Duncan³⁾ は砂の三軸圧縮試験から, 応力-ひずみ関係として, 主応力差 $\sigma_1 - \sigma_3$ と主軸ひずみ ϵ_1 の関係を次式で表わした。

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \epsilon_1 / (a + b \epsilon_1) \quad (1)$$

破壊時の軸差応力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ と双曲線の漸近線 $1/b = (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ を, 係数 R_f を用いて次のように表わす。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} \quad (2)$$

ここに, R_f は側圧 σ_3 の大きさにかわらず 0.75 ~ 1.0 の間にあることが明らかにされている。また, $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ は Mohr-Coulomb の破壊条件式より, また, 初期弾性係数 $E_i (= 1/a)$ は σ_3 の関数として与え, 結局, 土の応力-ひずみ関係を次のように表わしている。

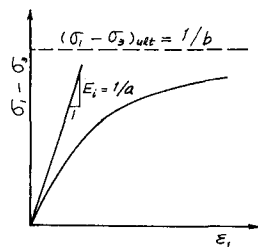


図 - 1

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = \varepsilon_1 / \{ 1/E_t + E_t R_f / (\sigma_1 - \sigma_3) \} \quad (3)$$

したがって、接線弾性係数 E_t は、最小主応力 σ_3 を一定と仮定すれば、 $E_t = \sigma(\sigma_1 - \sigma_3) / \varepsilon_1$ とおける。これに対して、著者らは平面ひずみ状態下におけるモルタルの応力-ひずみ関係を取り扱い、平均主応力 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ を一定にした三軸圧縮試験の結果から、次のように数式表示を試みた。この手法は Duncan によるものと同じであるが、異なる点として、a) 初期弾性係数は応力状態によらず一定であること、b) R_f の決定においては Griffith 理論を用いた破壊条件式と適用し、さらに平均主応力 σ_m の関数として表わされていること、c) 双曲線表示に σ_m の関数として与えられる係数 m を、 $\bar{\sigma} = m\bar{\varepsilon} / (a + b\bar{\varepsilon})$ のように導入し、実験結果との近似を向上させている点、などがあげられる。結果が図-1と示すと次のようである。

$$\bar{\sigma} = m\bar{\varepsilon} / (1/G_t + R_f \bar{\varepsilon} / \sigma_f) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} \quad m &= -1.135 X^3 + 2.557 X^2 - 2.182 X + 2.047; \quad X = \sigma_m / \sigma_{cr} \\ R_f &= -0.7 \times 10^{-3} \sigma_m / \sigma_{cr} + 1.025; \quad \sigma_{cr}: \text{モルタルの一軸圧縮強度} \end{aligned}$$

3. 弾塑性マトリックスと非線型応力-ひずみ関係

ここでは、上のような材料を対象に塑性域に達する以降の Drucker の降伏条件式による弾塑性マトリックスを用いた初期応力法による解析結果と、Duncan が示した応力-ひずみ関係の数式表示を用いた荷重漸増法による解析結果と比較した例を示す。図-2 は地盤に等分布荷重が作用したときの解析モデルの各種条件を示し、図-3 は、載荷中中央部の鉛直変位、図-4 は、載荷面付近の変位、図-5 は載荷面下の要素の荷重増分にもとづく応力、ひずみの挙動と、両解析結果と比較して示したものである。以上の結果より、両解析の結果にはいささしい差が認められることがわかる。これより、Drucker の降伏条件式から誘導された弾塑性マトリックスが、上のような材料の力学特性を十分あらわし得ることも考えられる。図-6 は初期応力法による荷重段階の増加に伴う塑性域の進展状況の解析結果を示し、これと対比する目的で、数式表示された応力-ひずみ関係と表わす曲線の接線弾性係数を、荷重段階 $P/Per = 1.0$ の段階で、断面 A-A'、および B-B' について示す。これによれば、変形係数が著しく低下している要素と、Drucker の降伏条件を満足する要素は一致することが認められる。しかし、これにもかかわらず変形挙動は十分な結果と手にとりやすい。

4. 修正荷重漸増法

一般の荷重漸増法は、荷重増分量の大きさによって解析結果に著しい差が生ずることが認められる。ここでは、この欠点を補い、荷重漸増法の精度を向上させるために導いた修正荷重漸増法と、前節に示した平面ひずみ状態でのモルタルの応力-ひずみ関係の数式表示を用いた解析例によって示す。計算手順を示すと以下のようになる。

a) 前段階の荷重増分において収束した応力とひずみをそれぞれ $\{\sigma_{e,i-1}\}$, $\{\varepsilon_{e,i-1}\}$ とし、そのときの応力増分を $\{\delta\sigma_{e,i-1}\}$ とする。これより平均主応力差 $\bar{\sigma}_{e,i-1}$ 、主ひずみ差 $\bar{\varepsilon}_{e,i-1}$ と計算し、これを用いて接線せん断弾性係数 $G_{t,i-1}$ を求め、剛性行列を形成しておく。なお、この剛性行列は一つの荷重増分内では一定である。

b) 荷重増分(外力)による応力およびひずみ増分をそれぞれ $\{\Delta\sigma_{n,i}\}$, $\{\Delta\varepsilon_{n,i}\}$ とし、平均主応

力差増分 $\Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ を次式で求める。

$$\Delta \bar{\sigma}_{n,i} = (\Delta \sigma'_{n,i} - \Delta \sigma''_{n,i}) / 2 \quad (5)$$

こゝで、 $\Delta \sigma'_{n,i}$ と $\Delta \sigma''_{n,i}$ は、 $\{\Delta \sigma_{n,i}\}$ と $\{\sigma_{c,i-1}\}$ から求められる。 $\Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ を各力-ひずみ関係の非線型性のために生ずる見かけの増分量とすると、 $\Delta \bar{\sigma}_i$ を真の平均主応力差増分と、次式が成立する。

$$\Delta \bar{\sigma}_{n,i} = \Delta \bar{\sigma}_i + \Delta \bar{\sigma}_{n,i} \quad (6)$$

c) 次式で与えられるひずみレベル、 $\{\epsilon_{c,i}\} = \{\epsilon_{c,i-1}\} + \{\Delta \epsilon_{n,i}\}$ より、主ひずみ差 $\bar{\epsilon}_{c,i}$ は

$$\bar{\epsilon}_{c,i} = \epsilon'_{c,i} - \epsilon''_{c,i} \quad (7)$$

と求められる。こゝで、 $\epsilon'_{c,i}$ と $\epsilon''_{c,i}$ は $\{\epsilon_{c,i}\}$ と主ひずみ成分に変換したものである。見かけの平均主応力差増分 $\Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ は、主ひずみ差 $\bar{\epsilon}_{c,i}$ を用いて次のように与えられる。

$$\Delta \bar{\sigma}_{n,i} = (\bar{\sigma}_{c,i-1} + \Delta \bar{\sigma}_{n,i}) - \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_{c,i}, \sigma_p) \quad (8)$$

こゝに、 $\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}_{c,i}, \sigma_p)$ は、主ひずみ差 $\bar{\epsilon}$ と独立変数、 σ_p をパラメータとする関数 $\bar{\sigma}$ と表わす。

d) 見かけの平均主応力差増分 $\Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ に等価な節点力(等価節点力)と次のように求める。

$$\{P_i\}^e = \int [B]^T \{\Delta \sigma_{n,i}\} d(vol) \quad (9)$$

こゝに、 $\{\Delta \sigma_{n,i}\}$ は、 $k = \Delta \bar{\sigma}_{n,i} / \Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ を用いて、次式で近似するものとす。

$$\{\Delta \sigma_{n,i}\} = k \{\Delta \sigma_{n,i}\} \quad (10)$$

e) 次の反復計算で用いられる各力 $\{\sigma_{c,i}\}$ は、次式で近似するものとす。

$$\{\sigma_{c,i}\} = \{\sigma_{c,i-1}\} + (1-k) \{\Delta \sigma_{n,i}\} \quad (11)$$

また、ひずみ $\{\epsilon_{c,i}\}$ は c) で求められている。

f) d) で求めた等価節点力を外力として、b) へ戻り、 $\Delta \bar{\sigma}_{n,i}$ が十分小さくなるまで反復計算す。

g) 各反復の変位増分を $\{\Delta \delta\}_i$ とすれば、N 回の反復計算の後の変位 $\{\delta\}_{c,N}$ は、次式で与えられる。

$$\{\delta\}_{c,N} = \{\delta\}_{c,i-1} + \sum_{j=1}^N \{\Delta \delta\}_j \quad (12)$$

以上の計算過程を図-7 に示す。計算例として図-8 に示すモルタルの立方体試体の二次元応力状態での変形挙動を取り扱う。初期各力として $\sigma_{x,i} = \sigma_{y,i} = 0.75 \sigma_{cr}$ を生ずるような初期荷重とあらかじめ与え、荷重増分として $\Delta P_y = -\Delta P_x$ を与えたとき、 P_y の載荷面における鉛直変位 S_y を図-9 に示す。これによれば、荷重漸増法による結果は、荷重増分を小さくするに従って修正荷重漸増法の結果へ収束する傾向が認められる。また、荷重漸増法による結果は、荷重増分により著しく異なることが認められる。

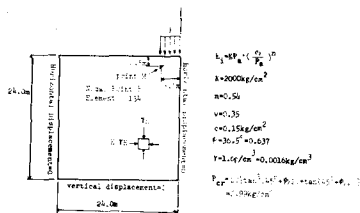


図-2

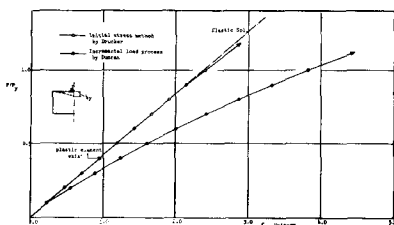


図-3

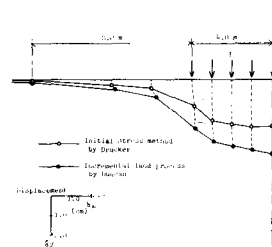


図-4

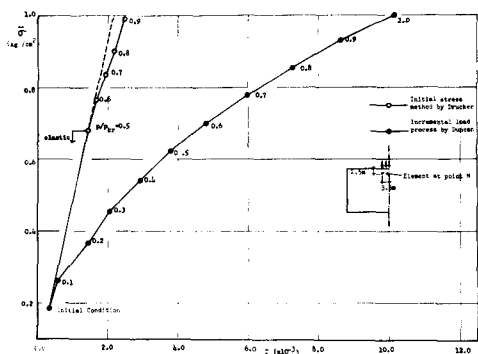


图 - 5

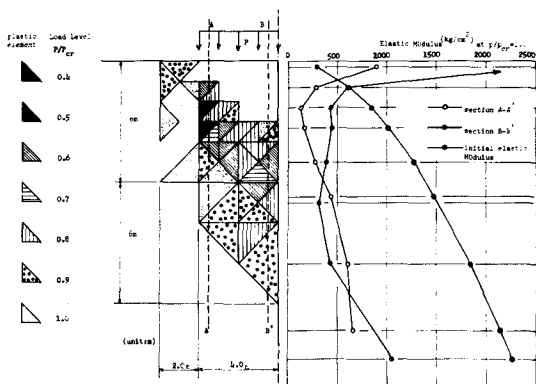


图 - 6

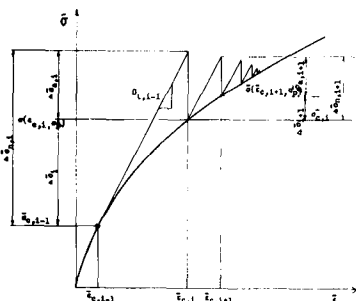


图 - 7

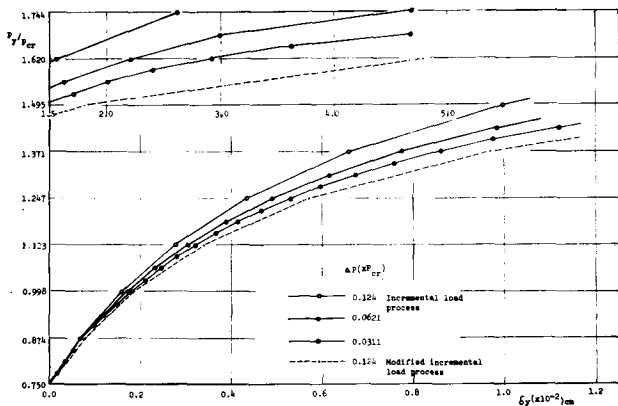


图 - 9

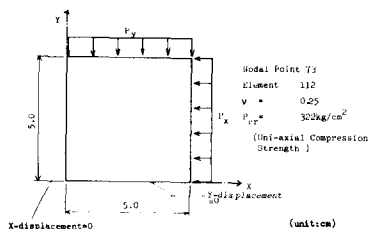


图 - 8

参考文献

- 1) O.C. Zienkiewicz et al: Elastic-Plastic Solutions of Engineering Problems "Initial Stress", Finite Element Approach, Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 1 (1969), pp. 75-100.
- 2) 秋本昌胤, 川井能万: 立坑底部周辺の応力変位状態について (第2報) 非線形解析, 日本建築学会誌, 86, 981 (1970), pp. 1-8.
- 3) J.M. Duncan and C.Y. Chang: Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, ASCE, SM 5 (1970), pp. 1629-1653.