I-143　有限要素法による板の面内応力解析

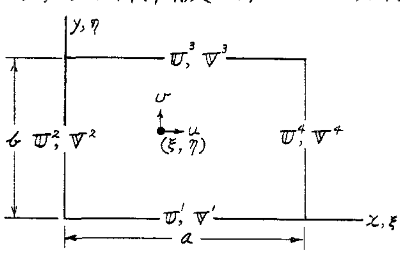
信州大学 正員 ○石川清志，谷本勉之助，夏目正太郎

1．まえがき

本法の有限要素法は演算子法を用いて，大型連立方程式を排除という構想から，漸化式に導き，容易に解析を進めることができる．有限要素法において，分割するに伴っての誤差を最小にしなければならず，高い数値解析精度を得るに，仮想有限要素を細分割しなければならない．細分割すると，連立方程式の次元数が急激に増加し，解析が非常に困難になる．我々はこの連立方程式を解くに，漸化式をもってほかならないと信じる．

一般的には，有要素的に分割した仮想交接点で変位適合および力平衡性を考えているが，本法は，それよりも自由度の大きい要素の仮想辺長上で平均した物理量で変位適合および力平衡性を考慮した．また解析過程の最終段階で，剛体マトリクスが漸化式の三軸マトリクスに導かれるが，三軸マトリクスを形成する要素は主軸 *diagonal* に比重の大きい数値で式が組まれるためである．

以上の観点から，数値解析精度に高いものが期待することができる．



$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

図−1.

2．出発方程式

応力方程式およびHooke法則より，一般変位および力式は

$$\mathbb{U}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2+\eta^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta'(\xi^2+\eta^2) & \beta\xi\eta & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \mathbb{X} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \gamma\xi\eta & \gamma'(\xi^2+\eta^2) \end{bmatrix} \mathbb{F}, \tag{1}$$

$$\mathbb{V}(\xi,\eta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & (1+2\alpha\beta'\nu)\eta, & (2+\alpha\beta\nu)\xi, & 0 & 0 & \alpha\nu \\ 0 & \nu & 0 & (\nu+2\alpha\beta')\eta, & (2\nu+\alpha\beta)\xi, & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{2}(1-\nu), & \frac{\xi}{2}(1-\nu)(\alpha+2\beta'), & \frac{\eta}{2}(1-\nu)(2\alpha+\beta), & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) & 0 \end{bmatrix} \mathbb{X} + \begin{bmatrix} \alpha\gamma\xi\nu, & 2\alpha\gamma'\eta\nu \\ \alpha\gamma\xi, & 2\alpha\gamma'\eta \\ \frac{\gamma}{2}\eta(1-\nu), & \gamma\xi(1-\nu) \end{bmatrix} \mathbb{F}. \tag{2}$$

$\mathbb{X}$：固有マトリクス，　$\mathbb{F}$：外力荷重

3．有限要素辺長上の一般変位および一般力

仮想有限辺長上の一般変位および力は，次の積分演算より求める：

$$I_1(\xi,\eta) = \int_0^a \mathbb{U}(\xi,\eta)\,dx, \qquad I_2(\xi,\eta) = \int_0^b \mathbb{U}(\xi,\eta)\,dy, \tag{3a}$$

$$J_1(\xi,\eta)=\int_0^a \mathbb{V}(\xi,\eta)\,dx,\qquad J_2(\xi,\eta)=\int_0^b \mathbb{V}(\xi,\eta)\,dy. \tag{3b}$$

それ故，図−1における各辺の変位および力量は，

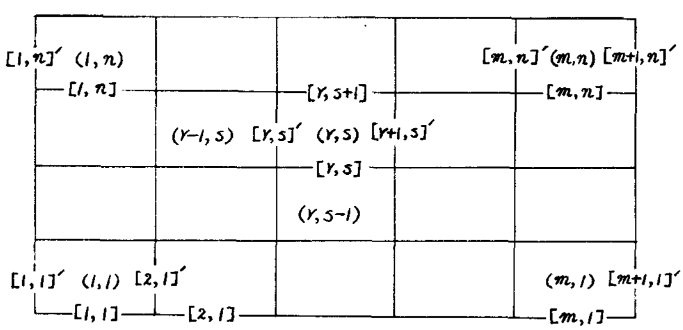
$$w^1=I_1(\xi,0),\quad w^2=I_2(0,\eta),\quad w^3=I_1(\xi,1),\quad w^4=I_2(1,\eta), \tag{4a}$$

$$\mathbb{V}^1=J_1(\xi,0),\quad \mathbb{V}^2=J_2(0,\eta),\quad \mathbb{V}^3=J_1(\xi,1),\quad \mathbb{V}^4=J_2(1,\eta). \tag{4b}$$

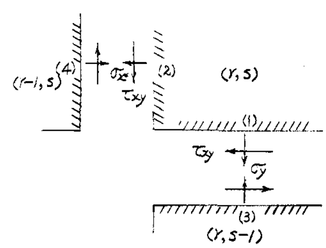
4．漸化式

一要素に注目し，各辺に対応する変位および力式(4)を系統的に整理すると，各辺の一般力は各辺の変位で表わすことができる：

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}^1\\ \mathbb{V}^2\\ \mathbb{V}^3\\ \mathbb{V}^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha^1 & \beta^1 & \gamma^1 & \delta^1\\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2\\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3\\ \alpha^4 & \beta^4 & \gamma^4 & \delta^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^1\\ w^2\\ w^3\\ w^4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k^1\\ k^2\\ k^3\\ k^4\end{bmatrix}\mathbb{F}. \tag{5}$$



図−2.



図−3.

式(5)を有限要素相互間において，変位適合および力平衡性を系統的に整理すると

$$\lfloor 0\quad a\quad a''\rfloor\begin{bmatrix}W_{s-1}\\ W_s\\ W_{s+1}\end{bmatrix}_{r-1}+\lfloor b'\quad b\quad b''\rfloor\begin{bmatrix}W_{s-1}\\ W_s\\ W_{s+1}\end{bmatrix}_{r}+\lfloor c\quad c''\quad 0\rfloor\begin{bmatrix}W_{s-1}\\ W_s\\ W_{s+1}\end{bmatrix}_{r+1}+Q_{rs}=0. \tag{6}$$

式(6)を図−2.のように，s方向に整理すると

$$\lfloor \mathbb{A}\quad \mathbb{B}\quad \mathbb{C}\rfloor\begin{bmatrix}\{W\}_{r-1}\\ \{W\}_r\\ \{W\}_{r+1}\end{bmatrix}+\{\mathbb{P}\}_r=0. \tag{7}$$

最後に，解析の正しさをみるために，左右対称的な系を解き，物理挙動も左右対称か，また仮想辺長上での変位適合および力平衡性が満足するかどうかみることができる．