

1. はじめに

先に, *Reissner* の変分原理にもとづいて *L.R.Herrmann* によって誘導された平板曲げ有限要素マトリックス¹⁾と同一のマトリックスが, 一般の応力分布や変位分布の基礎仮定からも誘導することができることを示し²⁾³⁾, このような事実にもとづいて, 有限要素マトリックスの定式過程に関する二・三の考察を行なった。⁴⁾

その際の論点の一つは, 次のようなものであった。すなわち, 3次の多項式によって与えられる剛性マトリックスが, 曲げおよび捩りモーメントが一次分布することを前提として誘導されるものであるとすれば, 変位関数の設定の時点において, その裏面に三角形要素の各節点に設けられる節点における曲げおよび捩りモーメントの値が, 変位関数の係数ベクトルの関数として設定されることになり, 要素内で一次分布するこれらの力量は, 各節点における値によって一義的に決まる。たとえば一次分布する辺上の曲げモーメントは, その辺を挟む2つの節点の曲げモーメントの値によって一義的に決まり, 節点における曲げモーメントの連続を保証することによって構造全体系のマトリックスを構成するものとすれば, 要素間の曲げモーメントの連続が保証されることになるということである。そして, 3次の多項式で与えられた変位関数から得られる有限要素マトリックスをこのような形で理解し, 定式化することが可能であるということであった。

ここでは, 曲率一次分布の平板曲げ要素を対象として, 有限要素マトリックスの定式過程について考察を行ない, 有限要素マトリックスを具体化する。

2. 定式過程の基礎的考察

要素 m のポテンシャルエネルギー関数 π_{pm} は式(1)のように与えられる。ここに, $\mathcal{E}$ は要素の曲率, D は材料剛性マトリックス, u は節点変位, f は u に対応する節点力である。式(1)の $u^T f$ の項は仮想仕事の原理から式(2)のように与えられる。ここに, u_B は要素の周辺節点の変位, f_B は u_B に対応する要素周辺節点の力量である。

要素の変位形 w を節点における変位成分の値 u_n の関数として式(3)のように与えると, 曲率 $\mathcal{E}$ は変位関数の微分によって, u_n の関数として式(4)のように得られる。いま, 節点変位 u と u_n と等しく式(5)のようにおけば, 式(1)の停留条件より式(6)の剛性マトリックス k が式(7)のように得られる。

要素の変位形が u_n の関数として与えられるのであるから, 要

$$\pi_{pm} = \frac{1}{2} \int \mathcal{E}^T D \mathcal{E} dA - u^T f \quad (1)$$

$$\mathcal{E}^T = \{ w_{,xx} \quad w_{,yy} \quad 2w_{,xy} \}$$

$$w_{,xx} = \partial^2 w / \partial x^2, \quad w_{,yy} = \partial^2 w / \partial y^2, \dots$$

$$u^T f = \int_{A_m} p w dA + \oint u_B^T f_B ds \quad (2)$$

$$w = \Phi_u^T u_n \quad (3)$$

$$\mathcal{E} = P_u u_n \quad (4)$$

$$P_u^T = \{ \Phi_{u,xx}^T \quad \Phi_{u,yy}^T \quad 2\Phi_{u,xy}^T \}$$

$$u = u_n \quad (5)$$

$$f = k u \quad (6)$$

$$k = \int_{A_m} P_u^T D P_u dA \quad (7)$$

要素周辺における変位 u_B と u_n の関数として式(8)のよう
に与えられる。式(3)および式(8)を式(2)に代入す
れば、式(6)の節点力 f の意義も式(9)のように示され
ることが分る。

いま、板の曲げの問題のように、応力-ひずみ関係式
などの基礎方程式が既に知られている場合には、要素周
辺上の変位 u_B に対応する力量 f_B と u_n の関数として
式(10)のように与えられる。

ここで、変位関数 $w(x, y)$ が x および y の 3 次
の多項式で与えられるものとすれば、式(11)が満足
される。したがって、式(2)の右辺第 2 項に式(8)
および式(10)を代入して得られる式(12)から、式
(7)の剛性マトリックス k が式(13)からも全く同じ
内容として得られることは、基礎理論から必然の帰
結である。

したがって、変位関数が式(11)を満足するように与えられるみまりにおいては、式(9)の節点力 f
の意義は式(14)であると理解し、式(9)の右辺第 1 項は作用外力 p の要素周辺の力量 f_B と等価な力
量への変換ないしは式(14)で与えられる節点力と等価な力量への変換として認識するの
が妥当である。
次に、以上の考察にもとづいて具体的な要素マトリックスの誘導を試みる。

3. 3 次 の 多 項 式 に も と ズ い た 要 素 マ ト リ ッ ク ス

基礎仮定として、要素の変位形を
式(15)のように完全な 3 次の多項式
で仮定する。式(15)より要素の曲率
 ϵ が式(16)のように得られる。また、
要素周辺上の変位 u_B は式(17)(18)
より、たとえば式(19)のように得ら
れるから、 u_B は要素周辺に沿った
座標系 S の関数である $\mathcal{L}_S$ によって
式(20)のように得られる。ここに、
(x_i, y_i) は節点の座標、 a_i は要
素の辺長、 α_i は要素の辺の法線の
 x 軸となす角度である(図-1)。

次に、要素内で曲げおよび捩りモ
ーメントが線形分布するものと仮定
し、節点におけるこれらの力量の値
 m_n の関数として表現する。要素内

$$u_B^T = \{ u_{B1}^T \ u_{B2}^T \ u_{B3}^T \}$$

$$u_{Bi}^T = \{ w \ w_{,s} \ w_{,n} \}_i$$

$$u_B = \mathcal{L}_S u_n \quad (8)$$

$$f = \int_{A_m} p \delta_u dA + \oint \mathcal{L}_S^T f_B dS \quad (9)$$

$$f_B^T = \{ f_{B1}^T \ f_{B2}^T \ f_{B3}^T \}$$

$$f_{Bi}^T = \{ Q_n \ -M_{ns} \ -M_n \}_i$$

$$f_B = Q_S u_n \quad (10)$$

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = 0 \quad (11)$$

$$\oint u_B^T f_B dS = u_n^T \oint \mathcal{L}_S^T Q_S dS u_n \quad (12)$$

$$k = \oint \mathcal{L}_S^T Q_S dS \quad (13)$$

$$f = \oint \mathcal{L}_S^T f_B dS \quad (14)$$

$$w(x, y) = \langle 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{10} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$= \Phi^T \epsilon$$

$$\epsilon = P_3 \epsilon \quad (16)$$

$$P_3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 \end{Bmatrix}$$

$$w_{,si} = -s_i w_{,x} + c_i w_{,y}, \quad w_{,ni} = c_i w_{,x} + s_i w_{,y} \quad (17)$$

$$c_i = \cos \alpha_i = \frac{y_j - y_i}{a_i}, \quad s_i = \sin \alpha_i = -\frac{x_j - x_i}{a_i} \quad (18)$$

$$(i, j) = (1, 2)(2, 3)(3, 1)$$

$$(w_{,s})_{Bi} = \langle 0 \ -s_i \ c_i \ -2s_i \bar{x}_i \ c_i \bar{x}_i - s_i \bar{y}_i \ 2c_i \bar{y}_i - 3s_i \bar{x}_i^2 \\ c_i \bar{x}_i^2 - 2s_i \bar{x}_i \bar{y}_i \ 2c_i \bar{x}_i \bar{y}_i - s_i \bar{y}_i^2 \ 3c_i \bar{y}_i^2 \rangle \epsilon \quad (19)$$

$$\bar{x}_i = x_i + (x_j - x_i) \frac{s}{a_i}, \quad \bar{y}_i = y_i + (y_j - y_i) \frac{s}{a_i}$$

$$u_B = \mathcal{L}_S \epsilon \quad (20)$$

$$m_n^T = \{ m_{n1}^T \ m_{n2}^T \ m_{n3}^T \}$$

$$m_{ni}^T = \{ M_x \ M_y \ M_{xy} \}_i$$

の力量の分布が二のように線形分布として仮定されると、要素周辺上の力量 f_B のうち M_n および M_{ns} は式(21)のように表わされる。ここに $\bar{M}_{xi}$, $\bar{M}_{yi}$, $\bar{M}_{xyi}$ は要素周辺上の曲げおよび捩りモーメントで、辺を挟む両端の節点における力量によって、たとえば式(22)のように与えられる。また、辺上のせん断力 Q_n は辺上で一定値として式(23)のように与えられるから、節点における力量 m_n の関数として式(24)のように表わすことができる。

したがって、要素のポテンシャルエネルギー関数 Π_{pm} は式(25)のように与えられる。式(25)の停留条件より式(26)が得られる。したがって、式(27)が得られ、 m_n に対応する変位 u_m と m_n とを結ぶ撓性マトリックス a が式(28)のように得られる。

式(28)に得られた撓性マトリックス a は、基礎仮定としての変位分布仮定にもとづいて誘導されたという意味において一つの意義を有する。式(16)から明らかのように、式(15)のような完全なる次の多項式で変位分布を仮定しても、捩りの項 w_{xy} は w_{xx} および w_{yy} の線形分布に対して独立な線形分布ではない。

ここでは、基礎仮定として要素内の曲げおよび捩りモーメントの分布を完全に独立な線形分布と仮定する。すなわち、要素内の曲げおよび捩りモーメントの分布を式(29)のように仮定する。ここに、 ζ_i は面積座標である。式(29)のように要素内の力量の分布が与えられると、要素のひずみエネルギー U_m は式(30)のように表わされる。式(30)に式(29)を代入して、式(28)に対応する撓性マトリックス a が式(31)のように得られる。

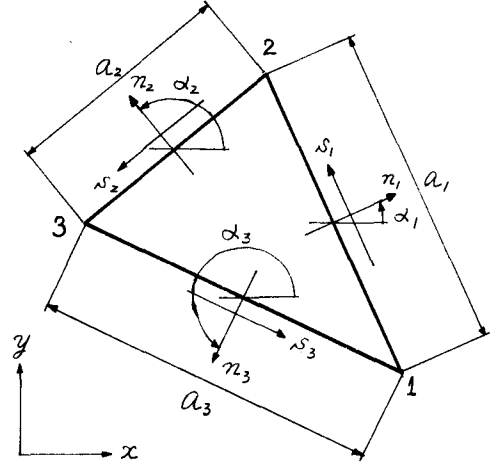


図1 三角形要素

$$-M_{ni} = -c_i^2 \bar{M}_{xi} - s_i^2 \bar{M}_{yi} - 2s_i c_i \bar{M}_{xyi} \quad (21)$$

$$-M_{nsi} = s_i c_i \bar{M}_{xi} - c_i s_i \bar{M}_{yi} - (c_i^2 - s_i^2) \bar{M}_{xyi}$$

$$\bar{M}_{xi} = M_{xi} + (M_{xj} - M_{xi}) \frac{s_i}{a_i} \quad (22)$$

$$Q_{ni} = \frac{1}{4(1+\nu)a_i A_m} \left\{ \beta_i (M_{xi} + M_{yi}) + \beta_n (M_{xj} + M_{yj}) - 2a_i^2 (M_{xk} + M_{yk}) \right\}$$

$$\beta_i = a_i^2 + a_j^2 - a_k^2 \quad (23)$$

$$f_B = R_m m_n \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{pm} &= \frac{1}{2} \int_{A_m} \epsilon^T D \epsilon dA - \oint u_B^T f_B ds \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{H}_g^T m_n - \mathcal{H}_g^T T_{gm} m_n \end{aligned} \quad (25)$$

$$\mathcal{H}_g = \int_{A_m} P_g^T D P_g dA, \quad T_{gm} = \oint L_g^T R_m ds$$

$$\mathcal{H}_g \mathcal{H}_g^T = T_{gm} m_n \quad (26)$$

$$\oint u_B^T f_B ds = m_n^T T_{gm}^T \mathcal{H}_g^{-1} T_{gm} m_n \quad (27)$$

$$u_m = a m_n$$

$$a = T_{gm}^T \mathcal{H}_g^{-1} T_{gm} \quad (28)$$

$$U_m = -\frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T \epsilon dA = \frac{1}{2} \int_{A_m} \sigma^T N \sigma dA \quad (30)$$

$$N = \frac{12}{Eh^3} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

$$a = \int_{A_m} \Phi_m^T N \Phi_m^T dA \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \Phi_m^T m_n, \quad \sigma^T = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\} \\ m_n^T &= \{m_{n1} \ m_{n2} \ m_{n3}\}, \quad m_{ni}^T = \{M_x \ M_y \ M_{xy}\}_i \\ \Phi_m^T &= \begin{bmatrix} \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_1 & 0 & 0 & \zeta_2 & 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

4. 要素剛性マトリックスへの変換

いま、仮定された曲げおよび捩りモーメントの分布が節点における力量 m_n の関数として表現され、これに対応して、節点力 f が m_n の関数として式(32)のように表わされるものとする。式(32)の変換マトリックス S は、たとえば式(33)のような関係式から得られる。式(33)におけ

$$\begin{aligned} f^T &= \{f_1^T \ f_2^T \ f_3^T\} \\ f_i^T &= \{P \ M_x \ M_y\}_i \\ f &= S \ m_n \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} (P)_i &= \frac{1}{2} \{Q_{ni}a_i + Q_{nk}a_k + (M_{nsi})_j - (M_{nsi})_i + (M_{nsk})_i - (M_{nsk})_k\} + (M_{nsi})_i - (M_{nsk})_i \\ &= \frac{1}{2} \{Q_{ni}a_i + Q_{nk}a_k + (M_{nsi})_j + (M_{nsi})_i - (M_{nsk})_i - (M_{nsk})_k\} \end{aligned} \quad (33)$$

る $(M_{nsi})_j$ は節点 j における辺 i に関する捩りモーメントを意味し、式(34)のように与えられるものである。また、節点力 f の曲げモーメント成分に対応する変換は、

$$(M_{nsi})_j = -S_i C_i M_{xj} + S_i C_i M_{yj} + (C_i^2 - S_i^2) M_{xyj} \quad (34)$$

たとえば式(35)のように与えられる。式(32)の関係式が仮定されると、節点力 f に対応する節点変位 u は式(36)に式(32)を代入して得られる。したがって、式(37)より

$$\begin{aligned} (M_x)_i &= \frac{1}{3} y_{ji} M_{xi} + \frac{1}{6} y_{ji} M_{xj} + \frac{1}{3} y_{ik} M_{xi} + \frac{1}{6} y_{ik} M_{xk} \\ &= -\frac{1}{3} y_{kj} M_{xi} + \frac{1}{6} y_{ji} M_{xj} + \frac{1}{6} y_{ik} M_{xk} \\ (M_y)_i &= -\frac{1}{3} x_{kj} M_{yi} + \frac{1}{6} x_{ji} M_{yj} + \frac{1}{6} x_{ik} M_{yk} \\ x_{ij} &= x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j \end{aligned} \quad (35)$$

要素の剛性マトリックス K は式(38)のように得られる。式(38)

$$(\delta m_n)^T u_m = (\delta f)^T u \quad (36)$$

に得られた剛性マトリックスは、式(33)および式(35)に示した

$$S^T u = u_m = a \ m_n \quad (37)$$

ように、節点力 f を評価する際に、要素周辺上に分布する力量と等価な力量を節点において集合して代表させるという平均値的意味での力量による平衡条件を満たしているだけで、要素周辺

$$\begin{aligned} f &= K u \\ K &= S a^{-1} S^T \end{aligned} \quad (38)$$

における変位の連続性に関する配慮はなされていない。しかし、上記の変換過程において要素周辺上の変位 u_B を節点変位 u の関数として仮定することによって、要素周辺における変位の要素間の連続性に関する配慮をすることもできる。また、式(28)または式(31)のように撓性マトリックスが得られると、構造全体系において曲げおよび捩りモーメントが連続するように構造全体系のマトリックスを構成することも可能である。

参考文献

- 1) L.R.Herrmann: Finite Element Bending Analysis for Plates; J. of Eng. Mech. Div. ASCE, 93, EM5, pp.13~26 (1967)
- 2) 吉田裕: 応力分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス; 生産研究 23, 2 (1971)
- 3) 吉田裕: 変位分布仮定から誘導された Herrmann の Mixed Model と同一の有限要素マトリックス; 生産研究 23, 3 (1971)
- 4) 吉田裕: 有限要素マトリックスの定式過程に関する一考察; 土木学会論文報告集, 第190号 (1971)