# I-141 直角二等辺三角形要素を用いた平板曲げ解析の定和分変換による検討

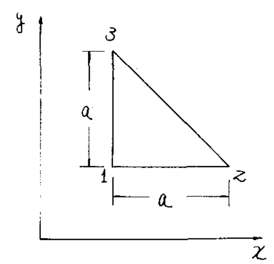
室蘭工業大学 正員 能町純雄
同 同 ○松岡健一

## 1. まえがき

応用力学における有限要素法の利用は、最近めざましいものがあり、要素そのものについても、より高精度の解を得るためのものが研究発表されている。また、その解の収束性や精度についても、数値解析的に検討を加えたものも少なくない。しかし、これら有限要素法による解析解が、問題としている構造物に対する基本微分方程式を満足しているかどうかを、数式的に取扱った研究はほとんどないようである[1]。我々は、先に、第20回応用力学連合講演会において、平面応力問題に対して、この問題を取扱い発表した[2]。ここでは、直角二等辺三角形要素による平板の曲げ解析を取り上げ、これが平板の基本微分方程式を満足させるものであるかどうかを、フーリエ定和分変換を用いて検討する。

## 2. 直角二等辺三角形要素による平板の解析

平板の曲げ解析に用いる三角形要素としては、種々のものがあるが、ここでは、比較的解析が簡単な、O.C. Zienkiewicz らによる節点変位 $w$, $\theta_x$, $\theta_y$ を与え変位関数を仮定して stiffness matrix を求める初期の要素を用いる。この場合の直角二等辺三角形要素の stiffness matrix は、等方性板で、ポアソン比 $\nu=0$ とすれば[3]、



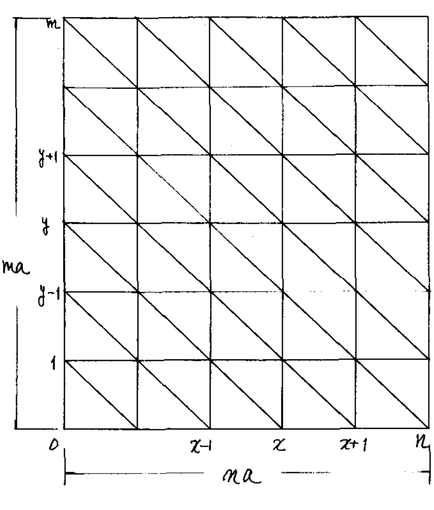

図－1.

$$
\mathbb{K} = \frac{D}{12a^2}\cdot\begin{bmatrix}
144 & & & & & & & & \\
-24 & 21 & & & & & & & \\
24 & 3 & 21 & & & \text{Symmetric} & & & \\
-72 & -6 & -30 & 72 & & & & & \\
-8 & 0 & 2 & -2 & 7 & & & & \\
40 & 1 & 9 & -32 & -1 & 20 & & & \\
-72 & 30 & 6 & 0 & 10 & -8 & 72 & & \\
-40 & 9 & 1 & 8 & 3 & -8 & 32 & 20 & \\
8 & 2 & 0 & -10 & 1 & 3 & 2 & -1 & 7
\end{bmatrix}
$$

また、節点変位 $(\delta)^e = |w_1,\ a\theta_{x1},\ a\theta_{y1},\ \cdots\cdots|^T$

節点力 $\mathbb{F} = |W_1,\ T_{x1},\ T_{y1},\ \cdots\cdots|^T$

従って、 $\mathbb{F} = \mathbb{K}(\delta)^e$ —— (1)




図－2

今、要素の配列および節点番号を、図－2のようにとる。板には、鉛直力のみが作用するものとすれば、節点 $(x,y)$ のつり合式は、

$$\sum W_{x,y} = P_{x,y} \qquad \text{—— (2)}$$

$$\sum T_{x,y} = 0 \qquad \text{—— (3)}$$

$$\sum T'_{x,y} = 0 \qquad \text{—— (4)}$$

$T_{x,y}$：$(x,y)$ 点の $x$ 軸廻りのモーメント

$T'_{x,y}$：$(x,y)$ 点の $y$ 軸廻りのモーメント

(2)式に(1)式の関係を用いて整理する．

$$576W_{x,y}-144\nabla_y W_{x,y}-144\nabla_x W_{x,y}-2\triangle_x\theta_{x,y}-70\triangle_y\theta_{x,y}-\nabla_x\triangle_y\theta_{x,y}+\triangle_x\nabla_y\theta_{x,y}$$
$$+2\triangle_y\theta'_{x,y}+70\triangle_x\theta'_{x,y}+\triangle_x\nabla_y\theta'_{x,y}-\triangle_y\nabla_x\theta'_{x,y}=12a^2\frac{P_{x,y}}{D} \qquad (5)$$

同様に(3)式から

$$2\triangle_x W_{x,y}+\triangle_y\nabla_x W_{x,y}-\triangle_x\nabla_y W_{x,y}+70\triangle_y W_{x,y}+3\nabla_x\nabla_y\theta_{x,y}-3\triangle_x\triangle_y\theta_{x,y}+18\Delta^2_y\theta_{x,y-1}+132\theta_{x,y}$$
$$+3\nabla_x\theta'_{x,y}-3.5\nabla_x\nabla_y\theta'_{x,y}+3.5\triangle_x\triangle_y\theta'_{x,y}+3\Delta^2_y\theta'_{x,y-1}+8\theta'_{x,y}=0 \qquad (6)$$

(4)式から

$$-70\triangle_x W_{x,y}-2\triangle_y W_{x,y}+\triangle_y\nabla_x W_{x,y}-\triangle_x\nabla_y W_{x,y}+3\nabla_y\theta_{x,y}-3.5\nabla_x\nabla_y\theta_{x,y}+3.5\triangle_x\triangle_y\theta_{x,y}$$
$$+3\Delta^2_x\theta_{x-1,y}+8\theta_{x,y}+3\nabla_x\nabla_y\theta'_{x,y}-3\triangle_x\triangle_y\theta'_{x,y}+18\Delta^2_x\theta'_{x-1,y}+132\theta'_{x,y}=0 \qquad (7)$$

ただし，$\theta_{x,y}$，$\theta'_{x,y}$ は，それぞれ，$x$ および $y$ 軸廻りの回転角であり，$\Delta_x f(x,y)=f(x+1,y)-f(x,y)$，$\triangle_x f(x,y)=f(x+1,y)-f(x-1,y)$，$\nabla_x f(x,y)=f(x+1,y)+f(x-1,y)$ を表す。

## 3．フーリエ定和分変換公式

フーリエ定和分変換公式については，これまで度々発表しているので[4,5]，詳しく述べないが，後の式の誘導のため必要な公式を以下に記す。

$$S_i[f(x)]=\sum_{x=1}^{n-1}f(x)\sin\frac{i\pi}{n}x \quad \text{とすれば逆変換は} \quad f(x)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}S_i[f(x)]\sin\frac{i\pi}{n}x$$
$$C_i[f(x)]=\sum_{x=1}^{n-1}f(x)\cos\frac{i\pi}{n}x \quad \text{とし，} \quad R_i[f(x)]=C_i[f(x)]+\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}(-1)^i f(n) \quad \text{とすれば}$$
$$\text{逆変換は，} \quad f(x)=\frac{1}{n}R_0[f(x)]+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}R_i[f(x)]\cos\frac{i\pi}{n}x+\frac{1}{n}(-1)^x R_n[f(x)] \qquad (8)$$

また，

$$S_i[\Delta^2 f(x-1)]=-\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i f(n)-f(0)\}-D_i S_i[f(x)],\quad S_i[\triangle f(x)]=-2\sin\frac{i\pi}{n}R_i[f(x)],$$
$$S_i[\nabla f(x)]=2\cos\frac{i\pi}{n}S_i[f(x)]+\sin\frac{i\pi}{n}\{f(0)-(-1)^i f(n)\},$$
$$C_i[\Delta^2 f(x-1)]=(-1)^i\Delta f(n-1)-\Delta f(0)-D_i R_i[f(x)],\quad C_i[\nabla f(x)]=2\cos\frac{i\pi}{n}R_i[f(x)]-f(1)-(-1)^i f(n-1),$$
$$C_i[\triangle f(x)]=-(-1)^i\Delta f(n-1)-\Delta f(0)+\left(1+\cos\frac{i\pi}{n}\right)\{(-1)^i f(n)-f(0)\}+2\sin\frac{i\pi}{n}S_i[f(x)],$$

ここで $D_i=2\left(1-\cos\frac{i\pi}{n}\right)$．

## 4．つり合式の定和分変換

(5)式を $x$，$y$ 方向に sine 変換する．

$$144(D_i+D_r)S_iS_r[W]+2\sin\frac{i\pi}{n}D_rR_iS_r[\theta]+(144-2D_i)\sin\frac{i\pi}{n}S_iR_r[\theta]$$
$$-2\sin\frac{r\pi}{m}D_iS_iR_r[\theta']-(144-2D_r)\sin\frac{i\pi}{n}R_iS_r[\theta']=\frac{12a^2}{D}S_iS_r[p] \qquad (9)$$

(9)式には，変換にともなって，境界値が残るが，本論では，要素の妥当性を検討することが目的であるので，これを無視している。これは一般には，単純支持板に相当するものである。以下の変換においても境界値は全て無視する。

また(5)式を $x$，$y$ 方向に cosine 変換すると，

$$144(D_r+D_i)R_iR_r[W]-(144-2D_i)\sin\frac{r\pi}{m}R_iS_r[\theta]-2\sin\frac{i\pi}{n}D_rS_iR_r[\theta]$$
$$+(144-2D_r)\sin\frac{i\pi}{n}S_iR_r[\theta']+2\sin\frac{r\pi}{m}D_iR_iS_r[\theta']=\frac{12a^2}{D}C_iC_r[p] \qquad (10)$$

(6) 式を $x$ 方向に sine，$y$ 方向に cosine 変換して．

$$(144-2D_i)\sin\frac{r\pi}{m}S_iS_r[W]-2\sin\frac{i\pi}{n}D_rR_iR_r[W]+(144-6D_i-24D_r+3D_iD_r)S_iR_r[\theta]$$
$$+12\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}R_iS_r[\theta]+(4D_i+4D_r-3.5D_iD_r)S_iS_r[\theta']-14\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}R_iS_r[\theta']=0 \quad -(11)$$

また．(6) 式を $x$ 方向に cosine，$y$ 方向に sine 変換すると．

$$2\sin\frac{i\pi}{n}D_rS_iS_r[W]-(144-2D_i)\sin\frac{r\pi}{m}R_iR_r[W]+(144-6D_i-24D_r+3D_iD_r)R_iS_r[\theta]$$
$$+12\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}S_iR_r[\theta]+(4D_i+4D_r-3.5D_iD_r)R_iS_r[\theta']-14\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}S_iR_r[\theta']=0 \quad -(12)$$

(7) 式に対しても同様に．

$$-2\sin\frac{r\pi}{m}D_iS_iS_r[W]+(144-2D_r)\sin\frac{i\pi}{n}R_iR_r[W]+(4D_i+4D_r-3.5D_iD_r)S_iR_r[\theta]$$
$$-14\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}R_iS_r[\theta]+(144-24D_i-6D_r+3D_iD_r)S_iR_r[\theta']+12\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}R_iS_r[\theta']=0 \quad -(13)$$

$$-(144-2D_r)\sin\frac{i\pi}{n}S_iS_r[W]+2\sin\frac{r\pi}{m}D_iR_iR_r[W]+(4D_i+4D_r-3.5D_iD_r)R_iS_r[\theta]$$
$$-14\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}S_iR_r[\theta]+(144-24D_i-6D_r+3D_iD_r)R_iS_r[\theta']+12\sin\frac{i\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{m}S_iR_r[\theta']=0 \quad -(14)$$

ただし．

$$S_iS_r[W]=\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{m-1}W_{x,y}\sin\frac{i\pi}{n}x\sin\frac{r\pi}{m}y.$$

$$R_iR_r[W]=\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{m-1}W_{x,y}\cos\frac{i\pi}{n}x\cos\frac{r\pi}{m}y+\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{m-1}W_{0,y}\cos\frac{r\pi}{m}y+\frac{1}{2}(-1)^i\sum_{y=1}^{m-1}W_{n,y}\cos\frac{r\pi}{m}y$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-1}W_{x,0}\cos\frac{i\pi}{n}x+\frac{1}{2}(-1)^r\sum_{x=1}^{n-1}W_{x,m}\cos\frac{i\pi}{n}x+\frac{1}{4}\left[W_{0,0}+(-1)^iW_{n,0}+(-1)^rW_{0,m}+(-1)^i(-1)^rW_{n,m}\right]$$

$$S_iR_r[\theta]=\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{m-1}\theta_{x,y}\sin\frac{i\pi}{n}x\cos\frac{r\pi}{m}y+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\theta_{x,0}\sin\frac{i\pi}{n}x+\frac{1}{2}(-1)^r\sum_{x=1}^{n-1}\theta_{x,m}\sin\frac{i\pi}{n}x,$$

$$R_iS_r[\theta']=\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{m-1}\theta'_{x,y}\cos\frac{i\pi}{n}x\sin\frac{r\pi}{m}y+\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{m-1}\theta'_{0,y}\sin\frac{r\pi}{m}x+\frac{1}{2}(-1)^i\sum_{y=1}^{m-1}\theta'_{n,y}\sin\frac{r\pi}{m}x,$$

$R_iS_r[\theta]$，$S_iR_r[\theta']$ についても同様であり．$n$，$m$ は $x$，$y$ 方向の分割数である。(9)～(14) を解くことにより．変位の定和分変換された値が求められるので．これを逆変換することにより．解析解を得ることができる。

(9)～(14) 式を適当に組合せて次の式をえる．

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{W}\\\bar{\theta}\\\bar{\theta'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\widetilde{P}\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{および} \quad \begin{bmatrix}A'_{11}&A'_{12}&A'_{13}\\A'_{21}&A'_{22}&A'_{23}\\A'_{31}&A'_{32}&A'_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{W}\\\hat{\theta}\\\widetilde{\theta'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{P}\\0\\0\end{bmatrix} \qquad (15)$$

式中

$$\left.\begin{matrix}A_{11}\\A'_{11}\end{matrix}\right\}=144(D_i+D_r),\quad \left.\begin{matrix}A_{12}\\A'_{12}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A_{21}\\A'_{21}\end{matrix}\right\}=(144-2D_i)\sin\frac{r\pi}{m}\mp 2D_r\sin\frac{i\pi}{n},$$

$$\left.\begin{matrix}A_{13}\\A'_{13}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A_{31}\\A'_{31}\end{matrix}\right\}=(144-2D_r)\sin\frac{i\pi}{n}\mp 2D_i\sin\frac{r\pi}{m},$$

$$\left.\begin{matrix}A_{22}\\A'_{22}\end{matrix}\right\}=144-6D_i-24D_r+3D_iD_r\mp 12\sin\frac{i\pi}{m}\sin\frac{r\pi}{m},$$

$$\left.\begin{matrix}A_{23}\\A'_{23}\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}A_{32}\\A'_{32}\end{matrix}\right\}=4D_i+4D_r-3.5D_iD_r\pm 14\sin\frac{i\pi}{m}\sin\frac{r\pi}{m},$$

$$\left.\begin{matrix}A_{33}\\A'_{33}\end{matrix}\right\}=144-24D_i-6D_r+3D_iD_r\mp 12\sin\frac{i\pi}{m}\sin\frac{r\pi}{m},$$

$$\left.\begin{array}{c}\widetilde{w}\\ \overline{w}\end{array}\right\} = S_i S_r[w] \pm R_i R_r[w], \quad \left.\begin{array}{c}\widetilde{\theta}\\ \overline{\theta}\end{array}\right\} = S_i R_r[\theta] \pm R_i S_r[\theta], \quad \left.\begin{array}{c}\widetilde{\theta'}\\ \overline{\theta'}\end{array}\right\} = S_i R_r[\theta'] \pm R_i S_r[\theta'],$$

$$\left.\begin{array}{c}\widetilde{p}\\ \overline{p}\end{array}\right\} = \frac{12a^2}{D}\left[S_i S_r[p] \pm C_i C_r[p]\right],$$

(15)式より.

$$\det|A|\cdot\widetilde{w} = (A_{22}\cdot A_{33} - A_{23}\cdot A_{32})\widetilde{p} \quad \text{および} \quad \det|A'|\cdot\overline{w} = (A'_{22}\cdot A'_{33} - A'_{23}\cdot A'_{32})\overline{p} \qquad (16)$$

ここで，分割を無に小さくすると．即ち．$n$, $m$を無限大とすると．

$$D_i \fallingdotseq \left(\frac{i\pi}{n}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{i\pi}{n}\right)^4, \quad \sin\frac{i\pi}{n} \fallingdotseq \left(\frac{i\pi}{n}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{i\pi}{n}\right)^3, \quad (r\text{についても同様}).$$

となるので．これを(16)式に代入して $\det|A|$ を計算し．高次の項を省略し．整理する，

$$\left.\begin{array}{c}\det|A|\\ \det|A'|\end{array}\right\} \fallingdotseq 144^2\times 12\left\{\left(\frac{i\pi}{n}\right)^4 + 2\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\left(\frac{r\pi}{m}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{m}\right)^4\right\}$$

また

$$A_{22}\cdot A_{33} - A_{23}\cdot A_{32} \fallingdotseq 144^2 - 144\times 30\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2 - 144\times 24\left(\frac{i\pi}{n}\right)\left(\frac{r\pi}{m}\right) - 144\times 30\left(\frac{r\pi}{m}\right)^2 \fallingdotseq 144^2$$

$$A'_{22}\cdot A'_{33} - A'_{23}\cdot A'_{32} \fallingdotseq 144^2 - 144\times 30\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2 + 144\times 24\left(\frac{i\pi}{n}\right)\left(\frac{r\pi}{m}\right) - 144\times 30\left(\frac{r\pi}{m}\right)^2 \fallingdotseq 144^2$$

従って．(16)式から．

$$\left\{\left(\frac{i\pi}{n}\right)^4 + 2\left(\frac{i\pi}{n}\right)^2\left(\frac{r\pi}{m}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{m}\right)^4\right\} S_i S_r[w] = \frac{a^2}{D} S_i S_r[p] \qquad \text{—— (17)}$$

$x$, $y$方向の板の長さをそれぞれ．$l_x$, $l_y$とすると．$l_x = na$, $l_y = ma$ であるから．(17)式は．

$$\left\{\left(\frac{i\pi}{l_x}\right)^4 + 2\left(\frac{i\pi}{l_x}\right)^2\left(\frac{r\pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{l_y}\right)^4\right\} S_i S_r[w] = \frac{1}{Da^2} N_i S_r[p]. \qquad \text{—— (18)}$$

フーリエ定和分の定義から．分割数$n$, $m$を無限にすることは．当然有限フーリエ変換を行なうと同義であるから．(18)式は．

$$\left\{\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right\} w = \frac{p}{D} \qquad \text{—— (19)}$$

となり．これは．板の曲げ解析の基本微分方程式と一致する。

5. むすび．

板の曲げ解析に用いられる三角形要素の比較的単純なものについて，定和分変換を用いて．その要素の妥当性を数式的に検討したが，non-conforming な要素でも．分割を無限に小さくしたとき．解は正しく正解値に収束することが証明された。他の要素についても同様な手法により検討することが可能である。また．この方法は．有限要素法による実際の数値解析に応用することも可能であり．規則性のある分割に対しては非常に有効な方法である。

（参考文献）


1). 川本，梶田，宮池，宮口：二次元有限要素法の適用における二，三の問題点，土木学会 第25回年次講演会．

2). Nomachi, Matsuoka : Applications of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proc. 20th Jap. Nat. Cong. for Applied Mechanics, 1970,（投稿中）.

3). 芳村，奥村：台形板の解法について，土木学会 第23回年次講演会．

4). S. G. Nomachi : On Finite Fourier Sine Series with Respect to Finite Differences, Mem. Muroran. I. T. Vol. 5, No. 1. 1965

5). S. G. Nomachi : A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration, Mem. Muroran. I. T. Vol. 5. No. 2. 1966