I-140　有限要素法と数値誤差について

伊藤忠電子計算サービス（株）　正員　武田　洋

1. まえがき

最近，有限要素法の理論の発展と大型電子計算機の使用とによって，複雑かつ大型の問題がこの方法により解析されている。しかし，特別な場合に解析結果が使いものにならなくなってしまう場合があり，その起因が問題となる。ここで，この原因について考えてみると，二種類の有限化による誤差をあげることができよう。その一は，有限要素法に由来する誤差であり，これは解析すべき連続の場を部分連続の場の集合に近似することによって生じるもの，即ち，モデル化による誤差（discretization error）である。また，その二は，電子計算機内部での数値表示に由来する誤差であり，これは無限に連続した実数の場を電子計算機内部では，浮動小数点数と呼ばれる有限かつ不連続な数の集合として表わし，その演算を行うために生じるもの，即ち，数値誤差（numerical error）である。本論文では，変位法に基づく有限要素解析における数値誤差の起因について概説し，有限要素モデルが結果におよぼす数値誤差を検討する。

2. 有限要素解析における数値誤差

構造物を有限要素解析する場合に数値誤差を生じやすいタイプは次のようなものである。

（1）異種の要素を併用する場合．特にこれは要素の自由度が異質で，その特性関係がちがう場合に注意を要する。例えば，シェルを面内と面外の要素で組み立てる場合

（2）非常に剛性の異なる材料からなるモデル．例えば，基礎と上部構造を一緒に解析する場合

（3）ある荷重条件のもとで，比較的大きな剛体変形をする場合

（4）辺長比の大きな要素を含む場合．

上記のすべての場合，その構造の剛性マトリックスが大きくなるにつれ，結果におよぼす数値誤差も増大すると考えられる。さらに数値誤差の原因をプログラムから考えてみると

（A）入力データの不確定性

（B）計算実行中の丸め

（C）構造全体の剛性マトリックスを計算する際に，低次の固有値に関する数値（変位モード）が，電子計算機の有限語長の性質から生じる打ち切り

が考えられ，（C）が最も大きな意味を持つことが文献［1］により確められている。

（A）入力データの不確定性

変位法に基づく有限要素法の平衡方程式は次のように表わされる。

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{R} \qquad (1)$$

ここで，$\mathbf{K}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{R}$ はそれぞれ，構造の剛性マトリックス，変位ベクトル，荷重ベクトルである。

まず，$\mathbf{R}$ が不確定性 $\delta\mathbf{R}$ を持っているものとし，結果 $\mathbf{r}$ におよぼす不確定性を $\delta\mathbf{r}$ とす

ると，（1）式は次のようになる。

$$\mathbf{K}\cdot(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})=\mathbf{R}+\delta\mathbf{R} \qquad (2)$$

ここで両辺のノルムをとり，整理すると

$$\frac{\|\delta\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|}\leq\|\mathbf{K}\|\cdot\|\mathbf{K}^{-1}\|\cdot\frac{\|\delta\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{R}\|}=\mathrm{COND}(\mathbf{K})\cdot\frac{\|\delta\mathbf{R}\|}{\|\mathbf{R}\|} \qquad (3)$$

となる。ここで，COND(**K**)は条件数（conditioning number）と呼ばれるものであり，ユークリディアン・ノルムを用いる場合，最大，最小の固有値を λmax，λmin として，次式になる。

$$\mathrm{COND}(\mathbf{K})=\frac{\lambda max}{\lambda min} \qquad (4)$$

次に **K** が不確定性 $\delta\mathbf{K}$ を持っている場合には（1）式は次のようになる。

$$(\mathbf{K}+\delta\mathbf{K})\cdot(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})=\mathbf{R} \qquad (5)$$

（5）式の両辺のノルムをとり，$\|\delta\mathbf{K}\|/\|\mathbf{K}\|\ll 1$ として整理すると

$$\frac{\|\delta\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{r}\|}\leq\mathrm{COND}(\mathbf{K})\cdot\frac{\|\delta\mathbf{K}\|}{\|\mathbf{K}\|} \qquad (6)$$

となる。（3），（6）式より，入力データの不確定性が結果におよぼす影響は，1:1の対応でなく，条件数の値により，非常に大きく拡大される可能性があることを示している。しかし（3）式は非常に大めの見積りであり，また（6）式で表わされた剛性マトリックス **K** の不確定性 $\delta\mathbf{K}$ は一般の場合，直接に基本的な入力データの不確定性に影響されないといわれている。

（B） 丸め誤差

一般に浮動小数点数は $\pm.d_1d_2\cdots d_t\times\beta^e$ と表わされるから，x を x_R で置き換えると

$$x_R=x(1+\delta) \qquad \text{ただし} \quad |\delta|\leq\beta^{1-t}/2 \qquad (7)$$

であり，1回の演算を行った場合の丸め誤差も同程度である。文献［1］によれば，丸め誤差の影響は微小であり，丸め誤差だけをとりのぞくことは危険であることが実験より示されている。

（C） 打ち切り誤差

構造の剛性マトリックス **K** は次のように表わすことができる。

$$\mathbf{K}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i V_i V_i^T \qquad (8)$$

ここで n は **K** の元数であり，λ_i，V_i は固有値および固有ベクトルである。なお，添字 T は転置を表わす。従って逆マトリックスは

$$\mathbf{K}^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)V_i V_i^T \qquad (9)$$

となる。（8），（9）式より，低次の固有値と高次の固有値の間に大きなひらきがあると，電子計算機内部では **K** の低次固有値に関するモードが打ち切られてしまい，そして $\mathbf{K}^{-1}$ では **K** の低次固有値に関するモードが大きな意味を持つ。しかし $\mathbf{K}^{-1}$ において打ち切られた数値にを回復することは出来ない。このことより，p を使用する電子計算機の10進桁数とし，打ち切り誤差を考慮した場合の有効桁 s は次のようになる。（単精度の場合）

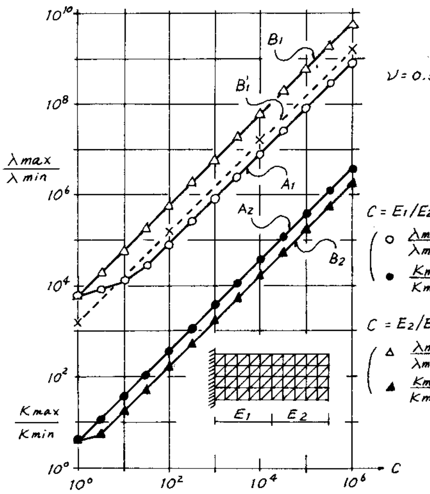
$$s=p-\log[\mathrm{COND}(\mathbf{K})] \qquad (10)$$

3. 構造解析モデルと数値誤差に対する考察

前節までに有限要素法と数値誤差の関係に対する基本事項を述べてきたが、ここでは数値誤差を発生すると考えられる要因（剛性，要素の幾何学的形状，剛性マトリックスの元数）に着目し，それらの要因がおよぼす数値誤差を量的に把握するために行った数値実験の結果を示し，その傾向について説明する。

（A） 剛性が異なる場合

グラフ１に片持梁について，その支持端側が自由端側に比較して剛性の大きい場合（線A）とその逆の場合（線B）について，その剛性の比を変化させた場合の条件数および剛性マトリックスの対角成分の最大値と最小値の比を示した。 なお，点線で示した B_1' は剛性マトリックスの元数がほぼ半分の場合であり，B_1 と B_1' とにより，条件数を剛性の比だけと関係づけることができよう。 このモデルに関しては，条件数の増大と剛性の比とはほぼ等しいと考えられる。 したがって，この関係と（10）式と結びつけることにより，弾性係数が異なる構造を解析する場合の桁落ちの可能性を次式のように推定できる。



グラフ１. 弾性係数と剛性マトリックス

$$f_1 = C_1 \log_{10} (E_{max} / E_{min}) \qquad (11)$$

ここで f_1，C_1 は剛性比によって生じる桁落ち，定数である。 この場合 $C_1 \fallingdotseq 1.0$ であろう。

グラフ１ではA，Bとも同じ傾向を示しているが，Bの場合は見掛け上の条件の悪さであると言われており，これを確かめるために，剛性マトリックス **K** に対して，次式に示すスケーリングを行ない，剛性比が 10^6 の場合を調べた結果を表１に示す。

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}\overset{*}{\mathbf{K}}\mathbf{D} \qquad (12)$$

ただし，

$$d_{ij} = \delta_{ij}\sqrt{k_{ij}}$$
$$\overset{*}{k}_{ij} = k_{ij} / \sqrt{k_{ii} k_{jj}}$$

E_1 / E_2	10^{-6}	10^{6}
COND（**K**）	6.47×10^9	8.10×10^8
COND（$\overset{*}{\mathbf{K}}$）	5.26×10^9	6.33×10^2

表・1 スケーリングの効果

表１より，Bが見掛け上の悪さであることがわかり，この場合，スケーリングの有効性が明らかである。 例えば，このモデルを共役傾斜法を用いて，自由端にせん断力が分布する場合について解くと，スケーリングしない場合，くりかえし回数が 201 であったが，スケーリングを行うと 58 に減じ，さらに結果の精度も改良されることが解った。

（B） 要素の幾何学的形状と数値誤差

グラフ２に，同一のトポロジー（グラフ１に示したもの）に対して，要素の幾何学的寸法を変化させた場合を示す。 この場合もグラフ１と同様に，条件数と要素形状の変化だけの関係を推定できよう。 しかし，ここで得た結果は平面問題のための一定ひずみ要素だけであることを記しておく。

$$f_2 = C_2 \cdot \log_{10} [(b/a)_{max}] \qquad (13)$$

（13）式は非常に大まかなものであるかも知れない。 なお，この場合 $C_2 \fallingdotseq 2.8$ である。

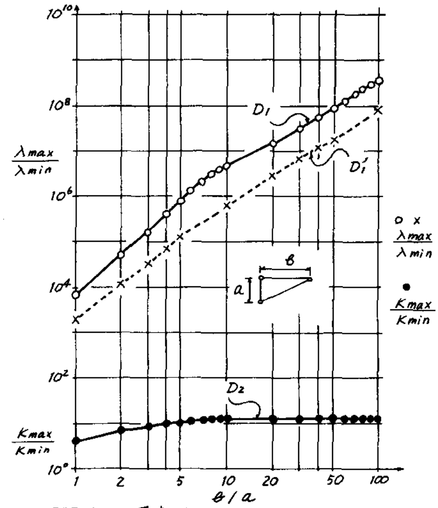
さらにこの場合には剛性マトリックスの対角成分から簡単にこの傾向を見つけることは出来ない。 有限要素法から考えてみても，b/a が大きい場合，モデル化による誤差も大きいと考えられるから（一般の場合），モデルを作るにあたって出来る限り辺長比の小さい要素を用いることが望ましい。

(C) 剛性マトリックスの元数と数値誤差

有限要素解析において適合要素を用いる場合には，要素分割をこまかくするにしたがって真の解に収束するが，電子計算機を用いる場合にはこれは成立しない。グラフ3より要素分割をこまかくするにしたがい，数値誤差も増大し，(A)，(B) 同様に下記の推測ができる

$$f_3 = C_3 \log_{10} \{ order(K) \} \qquad (14)$$

なお，このモデルの場合には $C_3 \fallingdotseq 1.0$ である。



グラフ2. 要素形状と剛性マトリックス

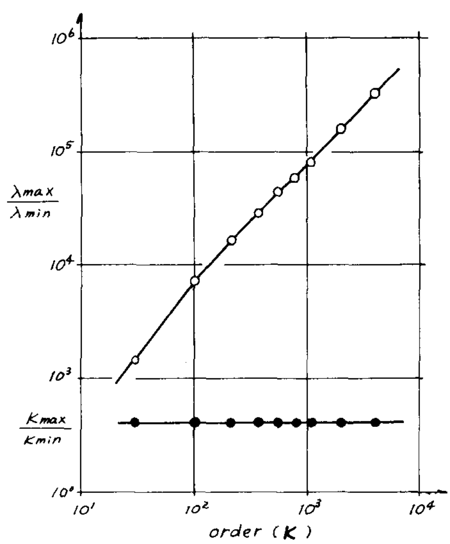
4. むすび

単純化した要因について別々に数値実験を行ったが実際に解析する構造では，種々の要因を含んでいる。この実験結果から予想されることは，個々の要因を別々に考え，それを加えることにより，大まかであるが，発生する数値誤差の可能性を考えることができよう。即ち，いままでにのべなかった要因を f_0 とすると

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 \qquad (15)$$

により予想される。

非線形解析を行う場合，一般に要素の形状および剛性に関する諸量はある程度自動的にプログラムで変化させる。従ってこの場合には大きな数値誤差を生む危険があり，何んらかの処理機能を含む必要があろう。



グラフ3 元数と剛性マトリックス

これらの数値実験は CDC 6600 ASKA, CDC 3600 FINE を用いて行った。また骨組解析の数値誤差の基本的傾向をまとめてくれた斉藤昭弘君に感謝する。

5. 参考文献

[1] J. R. Roy "A Study of Numerical Error in Structural Systems" ISD Report No. 77, Stuttgart, 1970

[2] G. E. Forsythe, C. B. Moler（渋谷政昭・田辺国士訳）"線形計算の基礎" 培風館, 1969