I-139 節点の接続をトポロジー的に考慮した有限要素法

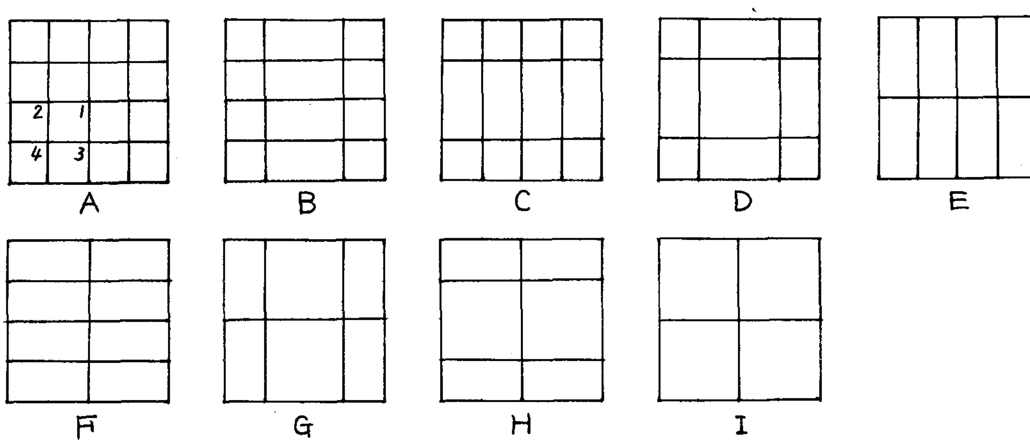
東北大学大学院 学生員 ○新関 茂
東北大学工学部 正 員 佐武正雄

1 まえがき

平板の解析等に用いられる有限要素法では，2次元の広がりをもつ要素に分割して解析を行うが要素間の全ての力学量が nodal point によってのみ伝達されるとしていることを考えれば 対象とする有限要素の集合体は，各 nodal point 間が 平板要素という特性素子によって接続された Network と考えることもできる。このことは，3次元の有限要素法についても同様である。したがって一つの nodal point に注目して考えれば 組み立てられた stiffness Matrix において，その nodal point を含む有限要素内に属する nodal point からの影響しか 直接的には考慮されておらず 本来の連続体の保持している性質の一部が失なわれていると考えられる。一般に使用されている非適合関数を用いた有限要素法では，こうした nodal point 間の接続の考え方の不十分さが剛性を減少させているものと考えられる。本文は，要素の重複を考えることによって剛性の不足を補うことを試み nodal point 間の接続にトポロジー的考察を応用し 従来の有限要素法の改良を試みようとしたものである。

2. 要素の重複を考慮した有限要素法による解析例

正方形固定板の(4×4)有限要素分割を例として説明する。この場合次の9種類の分割パターンを基礎とする。



図−1

荷重をうけている nodal point とその他の nodal point との接続ができるだけ均等となるようにこれ等のパターンを幾つか重複させることを考え，さらにその重複にウェイトも考慮する。このウェイトは単純にパターン(A)のウェイトを1とし(A)との要素数の比を用いている。計算例

I	A
II	A, I
III	A, D, E, F, I
IV	A, B, C, D, E, F, G, H, I

表−1

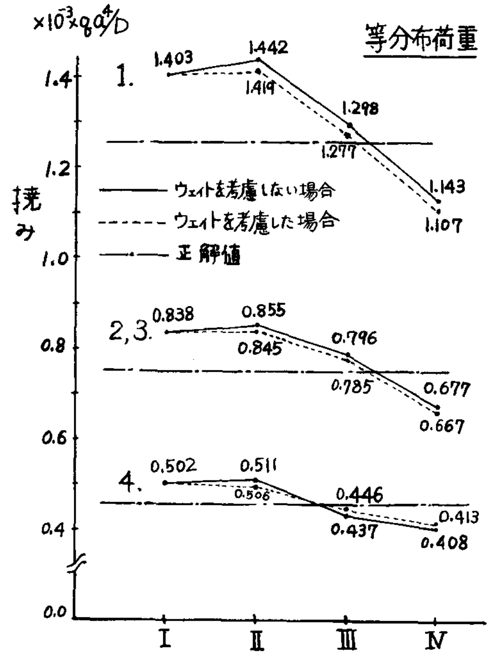


図-2

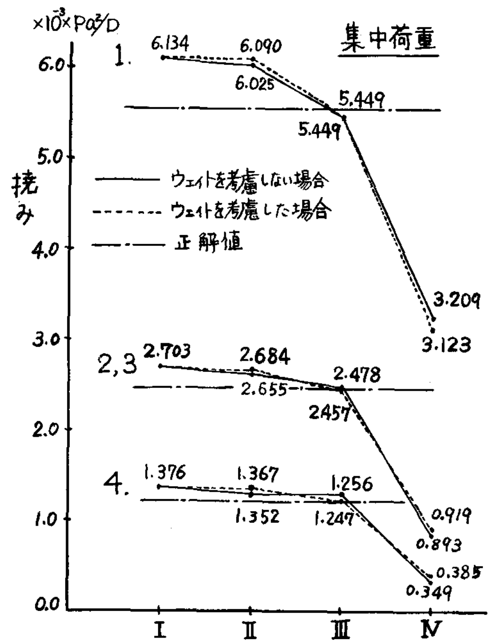


図-3

の組み合せは　表-1に示す4種類である。　図-2及び図-3は，等分布荷重及び *nodal point* 1 に集中荷重を受ける固定板の撓みを図示したものである。集中荷重をうける場合のⅢの重複では，集中荷重をうけている *nodal point* を含まないパターン(D)は，除外している。

3. 考察

3.1 要素の接続に関するトポロジー的考察

有限要素の集合体が *Network* を構成しているという概念に基づき　有限要素法をトポロジー的に定式化し，それによって要素の重複を考察する。要素の一つの *nodal point* の変位を基準にし　その *nodal point* に対する相対変位で表現すれば　文献(1)に述べられている骨格構造に対するトポロジー的定式化を　全く同様に　有限要素法に応用することができる。矩形要素について *nodal point* 4 (図-1(A))を基準とする相対変位で要素の *Stiffness Matrix* を表現すれば

$$R = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} u \qquad (3.1.1)$$

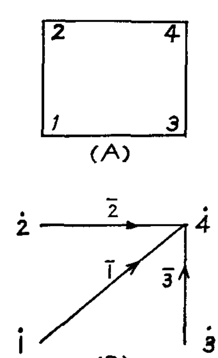
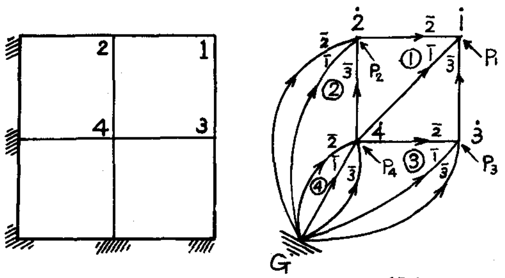


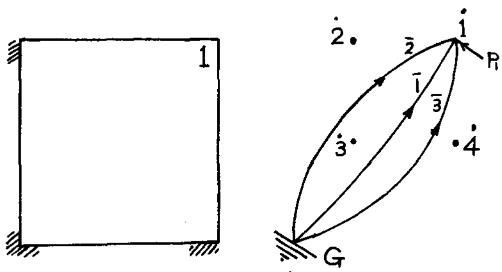
図-4

ここに u は *nodal point* 4 に対する相対変位を表わし，絶対変位 u' を用いて　$u_i = u'_i - u'_4$ によって定義される変位ベクトルである。4個の *nodal point* 間には，独立な接続経路は3個しか存在しない。したがって



(A) (B)

図-5



(A) (B)

図-6

各 *nodal point* 间を３本の枝で結び 図-4(B) に示す有向グラフで表現し 接続マトリックス $\mathbf{A}$ を

$$a^{k}_{ij}=\begin{cases}+\mathrm{I}\ (\text{要素}k\text{の } nodal\ point\ j \text{ に枝 } i \text{ が正連結なるとき}) \\ -\mathrm{I}\ (\qquad\qquad〃\qquad\qquad\quad \text{負}\ 〃\qquad) \\ \ \ 0\ (\qquad\qquad〃\qquad\qquad\quad \text{非}\ 〃\qquad)\end{cases}\qquad(3.1.2)$$

と定義する。ただし I は 原則として (3×3) の単位マトリックスとし 本文の例題では 境界条件, 対称条件の考慮によって (3×2), (3×1) の マトリックスに退化するものとする。図-1のパターン(A)の対称性を考え その4分1の有限要素の集合(図-5(A))は, 図-5(B)に示す有向グラフで表わされ 接続マトリックス $\mathbf{A}$ は

$$
{}^{t}\mathbf{A}=\begin{array}{c|cccccccccccc|}
 & & ① & & & ② & & & ③ & & & ④ & \\
 & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\
\dot{1} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dot{2} & 0 & \mathrm{I} & 0 & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dot{3} & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & 0 & 0 & 0 \\
\dot{4} & \mathrm{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & 0 & \mathrm{I} & 0 & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} & -\mathrm{I} \\
\hdashline
G & 0 & 0 & 0 & \mathrm{I} & \mathrm{I} & 0 & \mathrm{I} & 0 & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I} & \mathrm{I}
\end{array}\qquad(3.1.3)
$$

この接続マトリックス $\mathbf{A}$ は, 従属であるが G列を取り除くことによって 独立にすることができ ここで 改めてこのG列を除外したものを接続マトリックス $\mathbf{A}$ と定義しなおす。各 *nodal point* 间の相対変位ベクトル $\mathbf{u}$ と絶対変位ベクトル $\mathbf{u}'$ との関係は

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}\,\mathbf{u}'\qquad(3.1.4)$$

で与えられ 又各 *nodal point* に作用する外力を表わす荷重ベクトル $\mathbf{P}$ と $\mathbf{R}$ の関係を表わす平衡条件は,

$$\mathbf{P}={}^{t}\mathbf{A}\,\mathbf{R}\qquad(3.1.5)$$

したがって (3.1.1), (3.1.4), (3.1.5) より $\mathbf{P}$ と $\mathbf{u}'$ の関係式

$$\mathbf{P}={}^{t}\mathbf{A}\,\mathbf{K}\,\mathbf{A}\,\mathbf{u}'\qquad(3.1.6)$$

ここに $$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}K_1 & & & 0\\ & K_2 & & \\ & & K_3 & \\ 0 & & & K_4\end{pmatrix}\qquad(3.1.7)$$

を得る。ここに求められた ${}^{t}\mathbf{A}\mathbf{K}\mathbf{A}$ は 図-5(A) の構造全体の *Stiffness Matrix* である。

次に 図-5と図-6に示す分割を重複させることを考える。図-6に対しても接続マトリックスを 枝の接続していない点$(\dot{2},\dot{3},\dot{4})$を含めて組み立てれば 同様に

$$\mathbb{P}_2 = {}^t\!A_2 K_2 A_2 u_2' \tag{3.1.8}$$

が成り立つから (3.1.6) (3.1.8) にそれぞれ ウェイト w_i を乗じて加え合せ $u_1 = u_2 = u$ とおけば

$$\begin{aligned} w_1 \mathbb{P}_1 + w_2 \mathbb{P}_2 &= \{ {}^t\!A_1 (w_1 K_1) A + {}^t\!A_2 (w_2 K_2) A \} u \\ &= ({}^t\!A_1, {}^t\!A_2) \begin{pmatrix} w_1 K_1 & 0 \\ 0 & w_2 K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} u \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

したがって 一般にn個の分割パターンの重複に対しては

$$\mathbb{P} = K u \tag{3.1.10}$$

ここに $\mathbb{P} = \sum_i (w_i \mathbb{P}_i)$, $K = \sum_i {}^t\!A_i (w_i K_i A_i)$

と表現できる。

3.2 要素の重複に対する考察

要素を重複させて考えることによって 隣接要素の *nodal point* 以外の *nodal point* との接続を考慮することができるが 変位関数の近似の次数はそのままであるから 接続の範囲が広くなる程それだけ 要素の集合に拘束を与えることになると考えられる。この拘束と変位関数の非適合性によって生じる剛性の減少が 互いに打ち消し合うような重複が 最も適当なものと考えられる。適当な要素の重複を考えることにより、分割数が少なくとも 撓に関してよい近似を得る可能性のあることを、図-2,図-3は示している。

4. あとがき

有限要素の集合体をできるだけ連続体に近づける試みとして 要素の重複を考えたが 更に正確な *nodal point* 間の接続を考える必要があると思われ 今後も検討を進めてゆきたいと考えている。有限要素法に *Network* の概念を導入することによって 2次元以上の有限要素法も骨格構造と全く同様な取り扱いを可能にし, Diacoptics[2] の有限要素法への応用を容易にすると考えられる。

(参考文献)

1) S. J. Fenves & E. H. Branin, Jr. ; A network Topologial Formulation of Structual Analysis, Journal of Structual Division, A.S.C.E., vol.89, No. ST (1963)

2) G. Kron; Diacoptics, Macdnald (1963)

3) O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung; The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill (1967)

4) S. P. Timoshenko & W. Krieger; Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill (1957)

5) 近藤一夫,小野寺力男 ; 回路のトポロジー 岩波講座 現代応用数学 (1958)