I-137　有限要素法に関する一，二の考察

法政大学　正　大地羊三
川田工業　正　○金光善旭

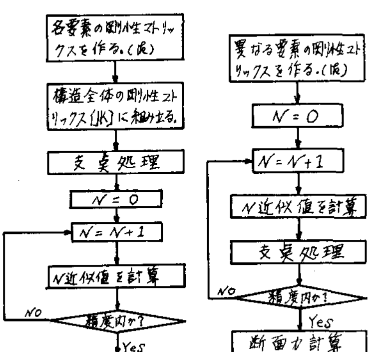
1．まえがき

有限要素法による構造解析は，現在色々の物に摘要して良い結果が得られている様である。しかしこれを，より実用化するためには，多元連立一次方程式をいかに効率よく解くかが大きな問題のひとつであろう。そこで，小型計算機でもインコアーで，大きな問題が解ける有限要素法向きの解法を提案する。これを利用して曲げ問題の三角形要素について変形仮定と応用仮定の場合について，検討を行なったのでそれについて報告する。

2．有限要素法向きの多元連立一次方程式の解法の提案

今日，多元連立一次方程式を解く方法は，色々と考えられているが，どの解法にしろ，まず，各要素の剛性マトリックス（k）を作り，これと各節点の結合を表わすインデックスを用いて，構造全体の剛性マトリックス〔$\mathbb{K}$〕と荷重項$\mathbb{P}$を加え，多元連立一次方程式{〔$\mathbb{K}$〕$x=\mathbb{P}$}の形にして変位を求めている。これをまともに解くと，計算時間とコアー，がかなり必要になるので，一般的には，バンド状にしたり，非零要素だけ記憶する索引付にしたりして，出来るだけコアーの節約を計っているが，それでも大きくなってしまう。

そこで，次に示す方法を用いると，コアーの節約が出来る。まず，各要素の剛性マトリックス（k）を作り，これを構造全体の剛性マトリックスに組み立ず，よって，支点処理も行なわずに各要素の節点結合を示すインデックス，各要素の剛性マトリックス（k）及び，荷重項だけを用いて第1近似値を求め，その近似値に初めて支点処理（支点が固定の時は，その節点の近似値を0，又，バネ支点の時は，その節点の近似値を補正する。）を行ない，その第1近似値を使用して，第2近似値と支点処理を行なう……。これを，必要な精度になるまでくり返す。



従来の反復法　　提案の反復法
図－1

上の方法だと，従来，用いた構造全体の剛性マトリックス〔$\mathbb{K}$〕を記憶する代りに，全要素の剛性マトリックス（k）を記憶しなければならなくなるが，有限要素の場合，同じ要素剛性マトリックス（k）が非常に多く出てくる事を利用すれば，異なる要素剛性マトリックスだけを記憶するだけでよいので大きな問題がとける様になる。

上に述べた方法を用いた場合，ＩＢＭ１１３０，１６ＫＷ（１Ｗ＝３２ｂｉｔ）を使い，節点数９００，要素数１８００，異なる要素１０，支点数１００の板の曲げ問題をインコアーで解ける。

なお，近似値を計算するにあたっては，どの反復法を用いてもよいが，今回は，共役勾配法を使用した。たとえば，後記の８×８のケースの場合の，８１節点，１２８要素，異なる要素剛性マトリックス（k）４で，中央に，集中荷重が作用した時，インプットデーターを読出してから，断面力を計算し終るまでに，５１分２１秒かかった。

3．三角形要素の曲げ問題

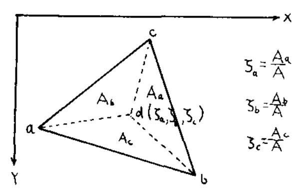
a．変形仮定

変形は，式（1）の様に仮定し，

$$\omega=\zeta_a a_1+\zeta_b a_2+\zeta_c a_3+\zeta_a\zeta_b a_4+\zeta_b\zeta_c a_5+\zeta_c\zeta_a a_6$$
$$+(\zeta_a\zeta_b-\zeta_a\zeta_b)a_7+(\zeta_b\zeta_c-\zeta_b\zeta_c)a_8+(\zeta_a\zeta_c-\zeta_a\zeta_c)a_9 \cdots\cdots (1)$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて，要素の変形条件式を求める。 この要素は，分割数を増すと，変位は，厳密解（Timoshenko）に大きい方から漸次近ずく。

面積座標



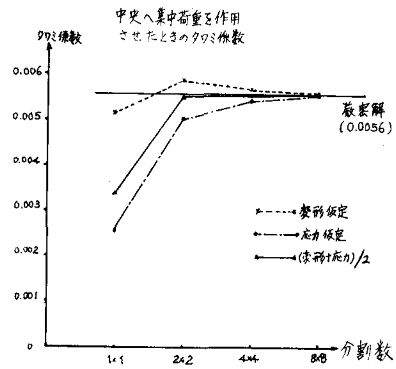
図－2

b．応力仮定

三角形要素内で，モーメントが式（2）の様に，直線的に

$$\begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix}\zeta_a + \begin{vmatrix} b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix}\zeta_b + \begin{vmatrix} b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{vmatrix}\zeta_c \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

変化すると仮定し，最小補足エネルギーの原理を用い，要素の剛性マトリックスを求める。 この要素は分割数を増すと，変位は，厳密解に小さい方から漸次近ずく。

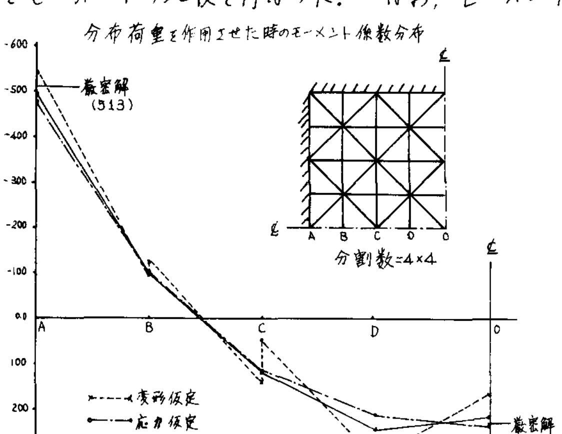


図－3

c．（変形仮定＋応力仮定）/2

変形仮定と応力仮定の変位は，図－3，で示す様に逆の傾向を示している。 又，断面力（モーメント）においても，変位ほど顕著ではないが同様の傾向が見られる。 そこで，剛性マトリックス，応力マトリックス，共に，（変形仮定＋応力仮定）/2 を試み，良い結果が得られた。

以上の3の方法について，正方形周辺固定板に，分布荷重と中央に集中荷重を作用させた時の，変位とモーメントの比較を行なった。 なお，モーメントにおいては，要素中心で比較した方が良いのであるが，比較の都合上，あえて節点のモーメント係数で行なった。 詳細は，当日発表する。



図－4

4．あとがき

三角形要素の曲げ問題については，上記の方法以外に変形と応力を仮定して，ライスナーの原理，又は，一般変分原理を用いる方法も考えられるので，今後，これらの方法についても研究を続けていきたい。

参考文献　大地羊三　構造解析とコンピュータ　産業図書　1971

Zienkiwicz　The Finite Element　McGraw-Hill