

室蘭工業大学 正員 能町純雄

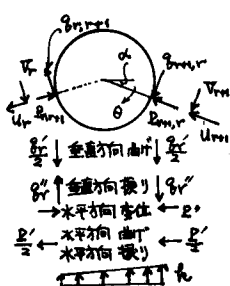
" " 正員 松岡健一

" " 学生員 ○沢田知之

1 まえがき

本研究は、鋼管パイルを円形に配置した基礎の応力解析について考察したものである。解析にあたっては、スパン方向にヒンチ結合されたパイルが弾性床にある場合を考え各々半径、水平方向の変位を垂直力、水平力及び振りモーメントさらに円形とすることにより生ずる各パイルの変形力を考慮しヒンチ結合点での力のつり合いを満足するように誘導された微分差分方程式にフーリエ変換を用いて応力解析を進める。従来のシートパイルや建造物の基礎工に替りこの種の構造物は剛性の大きいシートパイル又は鋼管矢板セル型ウェル等として橋梁等の基礎として最近用いられてきている。この研究は、これらの構造物の応力解析の手がかりを得る為に行なったものである。

2 スパン方向にヒンチ結合されスパン直角方向に円形面構造である場合の解析



今、スパン長 l 、パイル数を n とし、自由端を $x=0$ とする。また荷重は、 $x=0$ なる点にかかるものとする。図-①の如くパイル $r, r+1$ に対して各々半径、水平方向の曲げ、振りに関与する g_r', g_r'' および P' で表わされる水平方向の変位 ε を考慮することにより次の4式が誘導される。

ここで

k = 地盤反力係数 EI = 管の曲げ剛性 GJ = 管の振り剛性

$EI' =$ 管の厚さ方向の曲げ剛性 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$

$K = 2ak$

図-①

$$EI \left[\frac{\{ \ddot{V}_{r+1}(x) + \ddot{V}_r(x) \} \cdot \cos \alpha}{2} - \frac{\{ \ddot{U}_{r+1}(x) - \ddot{U}_r(x) \} \cdot \sin \alpha}{2} \right] = g_r' + \left[\frac{\{ U_{r+1}(x) - U_r(x) \} \cdot \sin \alpha}{2} - \frac{\{ V_{r+1}(x) + V_r(x) \} \cdot \cos \alpha}{2} \right] \cdot K \cos \alpha \quad \text{①}$$

$$EI \left[\frac{\{ \ddot{V}_{r+1}(x) - \ddot{V}_r(x) \} \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{\{ \ddot{U}_{r+1}(x) + \ddot{U}_r(x) \} \cdot \cos \alpha}{2} \right] = -P' \quad \text{② (水平方向地盤反力置換)}$$

$$GJ \cdot \frac{\{ \ddot{V}_{r+1}(x) - \ddot{V}_r(x) \}}{2a} = 2a \cdot \cos \alpha \cdot g_r'' - P' \cdot a \cdot \sin \alpha \quad \text{③}$$

$$\{ V_{r+1}(x) + V_r(x) \} \cdot \sin \alpha + \{ U_{r+1}(x) - U_r(x) \} \cdot \cos \alpha = \varepsilon \quad \text{④}$$

また次の如くの関係がある。

$$g_{r+1,r} \cdot \cos \alpha - P_{r+1,r} \cdot \sin \alpha = \frac{g_r'}{2} + g_r'' \quad \text{⑤} \quad g_{r+1,r} \cdot \sin \alpha + P_{r+1,r} \cdot \cos \alpha = P'' - \frac{P'}{2} \quad \text{⑦}$$

$$g_{r,r+1} \cdot \cos \alpha + P_{r,r+1} \cdot \sin \alpha = g_r'' - \frac{g_r'}{2} \quad \text{⑥} \quad g_{r,r+1} \cdot \sin \alpha - P_{r,r+1} \cdot \cos \alpha = -P'' - \frac{P'}{2} \quad \text{⑧}$$

次に節点の釣り合い条件より

$$g_{r,m} = g_{r,m} \quad \text{-----} \quad (9)$$

$$P_{r,m} = P_{r,m} \quad \text{-----} \quad (10)$$

又④式における変形量 ε を求めると次の如く示される。

$$\varepsilon = 2 \cdot \frac{dE}{d\alpha'} = \frac{aE^*}{EI} \left[2\pi F_1^2 + 2\pi F_1 F_3 + \frac{3}{4}\pi F_3^2 - 2aF_1 \left\{ \cos\alpha'(\pi-\alpha') + \sin\alpha' \right\} - aF_1 \times \right. \\ \left. \left\{ \cos\alpha'(\pi-\alpha') + \frac{1}{8}\sin 2\alpha' + \sin\alpha' + \frac{1}{2}(\pi-\alpha') \right\} + 2a^2 \left\{ \cos\alpha'(\pi-\alpha') + \frac{5}{4}\sin\alpha' + \frac{\pi-\alpha'}{2} \right\} \right]$$

そこで,

$$F_1 = \left[\left(\frac{1}{16} \frac{\pi a}{EI} \right)^2 \cdot a \cdot \left\{ (1+\cos\alpha') \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\alpha' - \sin\alpha' \right) - \cos\alpha'(\pi-\alpha') + \frac{\pi-\alpha'}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\alpha' \right\} - \left(-\frac{\pi a}{8EI} \right)^2 \cdot a \cdot (1+\cos\alpha') \right] \\ / \left\{ \left(\frac{3}{8} \frac{\pi a}{EI} \right)^2 - \left(\frac{a}{8EI} \right)^2 \pi \alpha' \right\}$$

$$F_2 = \left[\left(\frac{a}{8EI} \right)^2 \cdot a \cdot \pi \alpha' (1+\cos\alpha') - \frac{3}{16} \left(\frac{\pi a}{EI} \right)^2 \cdot a \cdot \left\{ (1+\cos\alpha') \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{4}\alpha' - \sin\alpha' \right) - \cos\alpha'(\pi-\alpha') + \frac{\pi-\alpha'}{2} - \frac{\sin 2\alpha'}{4} \right\} \right] \\ / \left\{ \left(\frac{3}{8} \frac{\pi a}{EI} \right)^2 - \left(\frac{a}{8EI} \right)^2 \pi \alpha' \right\}$$

$$F_3 = a \cdot (1+\cos\alpha') + F_2 - F_1$$

よって①②③④の各式と⑤⑥⑦⑧の各式より、 $g_{r,r-1}$, $g_{r,r+1}$, $E_{r,r-1}$, $E_{r,r+1}$ を求め各節点での、

釣り合い条件式⑨⑩に代入することにより2つの微分差分方程式を得る。ここに於いて、

$$u_r(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} x, \quad v_r(x) = \sum_{i=1}^n v_i(x) \cdot \cos \frac{2\pi i}{n} x \text{ とおき、} x \text{ 方向に } 7/12 \text{ 変換を行なう、}$$

$$\tilde{u}_i(x) = \int_0^l u_i(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx, \quad \tilde{v}_i(x) = \int_0^l v_i(x) \sin \frac{m\pi}{l} x dx \text{ とおくと次の2式が導かれる。}$$

$$\left[-\frac{GJ}{4a^2} \tan\alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{EI}{4} \{ \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right) + \left\{ \frac{K}{4} \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \frac{EI'}{AA} \sin\alpha \cdot \cos\alpha \right\} \sin \frac{2\pi i}{n} \right] \cdot \tilde{v}_i(x) \\ + \left[-\frac{EI}{4} \left\{ (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) - \sin^2\alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 + \left\{ \frac{K}{4} \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \frac{EI'}{AA} \cos\alpha \right\} (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right] \cdot \tilde{u}_i(x) \\ + \left[-\frac{GJ}{4a^2} \tan\alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right) + \frac{EI}{4} \{ \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \tilde{v}_i(l) \\ + \left[\frac{GJ}{4a^2} \tan\alpha \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right) - \frac{EI}{4} \{ \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \tilde{v}_i(0) \\ + \left[-\frac{EI}{4} \{ \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \right] \cdot \tilde{v}_i(l) + \left[\frac{EI}{4} \{ \tan\alpha \cdot \sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \} \cdot \sin \frac{2\pi i}{n} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \right] \cdot \tilde{v}_i(0) \\ + \left[-\frac{EI}{4} \left\{ (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) - \sin^2\alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right\} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \tilde{u}_i(l) + \left[\frac{EI}{4} \left\{ (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) - \sin^2\alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \tilde{u}_i(0) \\ + \left[\frac{EI}{4} \left\{ (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) - \sin^2\alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right\} (-1)^m \left(\frac{m\pi}{l} \right) \right] \cdot \tilde{u}_i(l) + \left[-\frac{EI}{4} \left\{ (\cos \frac{2\pi i}{n} + 1) - \sin^2\alpha (\cos \frac{2\pi i}{n} - 1) \right\} \left(\frac{m\pi}{l} \right) \right] \cdot \tilde{u}_i(0) \\ = 0 \quad \text{-----} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{GJ}{4A^2} (\cos \frac{2\pi l}{n} - 1) \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) - \frac{EI}{4} (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \cdot \cos \alpha \left(\frac{M\pi}{l} \right)^3 - (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \left(\frac{K}{4} \cos \alpha + \frac{EI'}{AA} \sin \alpha \right) \right] \cdot \hat{v}_i(x) \\
& + \left[\frac{EI}{4} \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \left(\frac{M\pi}{l} \right)^4 + \left(\frac{K}{4} \cos \alpha - \frac{EI'}{AA} \right) \cdot \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \right] \cdot \hat{u}_i(x) + \left[\frac{GJ}{4A^2} (\cos \frac{2\pi l}{n} - 1) (-1) \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) \right. \\
& - \frac{EI}{4} (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \cdot \cos \alpha \cdot (-1)^3 \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right)^3 \left. \right] \cdot \hat{v}_i(l) + \left[-\frac{GJ}{4A^2} (\cos \frac{2\pi l}{n} - 1) \left(\frac{M\pi}{l} \right) + \frac{EI}{4} (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \hat{v}_i(0) \\
& + \left[\frac{EI}{4} (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \cos \alpha \cdot (-1)^4 \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) \right] \cdot \hat{v}_i(l) + \left[-\frac{EI}{4} (\cos \frac{2\pi l}{n} + 1) \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) \right] \cdot \hat{v}_i(0) \\
& + \left[-\frac{EI}{4} \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-1)^4 \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) \right] \cdot \hat{u}_i(l) + \left[\frac{EI}{4} \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right) \right] \cdot \hat{u}_i(0) \\
& + \left[\frac{EI}{4} \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot (-1)^3 \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \hat{u}_i(l) + \left[-\frac{EI}{4} \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{M\pi}{l} \right)^3 \right] \cdot \hat{u}_i(0) \\
& = 0 \quad \text{--- (13)}
\end{aligned}$$

よって⑪⑫式の $\hat{u}_i(x)$, $\hat{v}_i(x)$ の $2\pi l$ 次連立方程式とし、境界条件式および次に示す様なフーリエ逆変換公式を用いてたわみを求めることができる。

$$u_i(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{u}_i(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{--- (13)} \quad v_i(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_i(x) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \text{--- (14)}$$

又、⑪⑫式中における $u_i(l)$, $v_i(0)$, $\hat{v}_i(l)$, $\hat{u}_i(0)$ は、境界条件を満足する定数である。

次に境界条件として、

$$x=0 \text{ 端が自由端の場合} \quad u_i(0) = v_i(0) = 0 \quad \text{--- (15)} \quad \ddot{u}_i(0) = \ddot{v}_i(0) = 0 \quad \text{--- (16)}$$

$$\frac{EI}{2} \cos \alpha (1 + \cos \frac{2\pi l}{n}) \ddot{v}_i(0) + EI \sin \alpha \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \ddot{u}_i(0) - \frac{GJ}{2A^2} (1 - \cos \frac{2\pi l}{n}) \dot{v}_i(0) + E\tau = 0 \quad \text{--- (17)}$$

$$\frac{EI}{2} \sin \alpha \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \ddot{v}_i(0) - \frac{EI}{2} \cos \alpha \cos \frac{2\pi l}{n} \cdot \ddot{u}_i(0) + \frac{EI}{AA} \{ 2(1 - \cos \frac{2\pi l}{n}) \cos \alpha \cdot \dot{u}_i(0) + 2 \sin \frac{2\pi l}{n} \cdot \sin \alpha \} \cdot \dot{v}_i(0) = 0 \quad \text{--- (18)}$$

$$AA = E \cdot \frac{EI'}{E^*}$$

$x=l$ 端が固定端の場合

$$u_i(l) = v_i(l) = 0 \quad \text{--- (19)} \quad \dot{u}_i(l) = \dot{v}_i(l) = 0 \quad \text{--- (20)}$$

よて $u_i(0)$, $v_i(0)$, $\ddot{u}_i(l)$, $\ddot{v}_i(l)$ を境界条件⑪~⑫を満足するように定めると⑬⑭の各式より各々半径、水平方向のたわみ $u_i(x)$, $v_i(x)$ が得られる。

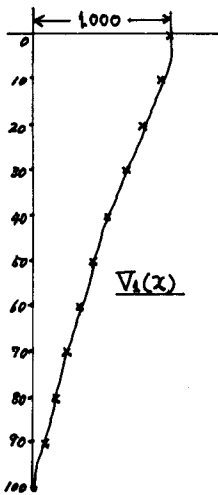
次に一端 $x=l$ においてヒンジ、他端 $x=0$ で固定であるが、単位長さの水平変位 $u(0)=1$, $v(0)=1$ を与える場合を考えると、 $\ddot{u}_i(l)=0$, $\ddot{v}_i(l)=0$ であり、 $i=1$ であることを考慮して⑪⑫式にこれらの境界条件を代入して $u_i(x)$, $v_i(x)$ を求めることができる。ここで $\ddot{u}_i(0)$, $\ddot{v}_i(0)$ は $\dot{u}_i(0)=0$, $\dot{v}_i(0)=0$ である条件を満足するように定める。

3 数値計算例

今, $n=6$, $l=100\text{cm}$, $A=2\text{cm}$, $k=1.0\text{ kg/cm}^3$, $E=2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$, $G=8.1 \times 10^5\text{ kg/cm}^2$,
 $I=4.233398\text{ cm}^4$, $J=8.670796\text{ cm}^4$, $I'=0.000667\text{ cm}^4$, のものについて, $x=l$ 端
 でヒンジ, $x=0$ 端で固定であるが, 水平変位 $u(0)=1$, $v(0)=1$, を与えるもののため図,
 および x , y 軸に対するモーメント図を下に示す。(図1~4)

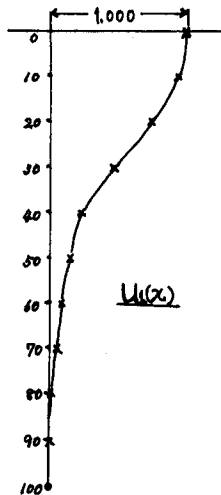
(図-1)

たわみ図 $v_1(x)$



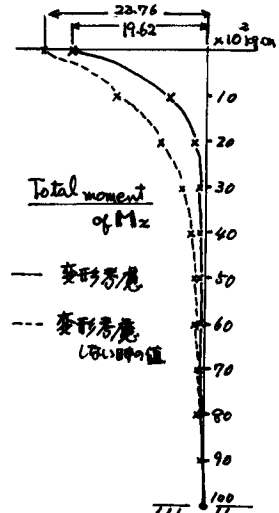
(図-2)

たわみ図 $u_1(x)$



(図-3)

モーメント図 $M_1(x)$



4 あとがき

以上スパン方向にヒンジ結合された円形に配置された鋼管パイプ
 の解析と解析例を述べたが, これらは既に述べた円形棒状要素
 による平面構造の解析を拡張したものであり, 境界条件を変
 えた数値計算も現在進めており, 実験解析も行なっており, 理論の
 検討をする予定である。

参考文献

S.G. Nonachi: A Note on Finite Fourier Transforms
 Concerning Finite Integration
 (The Transcript from the memories of the Mororan)
 (Institute of Technology, Vol.5, No.2)

(図-4)

モーメント図 $M_2(x)$

