

本文は(1)杭周辺の土が「杭の任意点の変位に比例する反力を起す」という仮定に従う範囲で、その土の剛性マトリックス $[K_{sij}]$ を誘導し、(2)これと杭の剛性マトリックス $[K_{pij}]$ を用いて、杭基礎の剛性マトリックス $[K_F]$ をユニット分割法によって求め、(3)これを構造物の全体剛性マトリックスに加えることによつて、軟弱な地盤に支持されている構造物の静的解析に基礎の弾性特性を取り入れようと試みたものである。また、(4)剛性マトリックス $[K_{pij}]$ 、 $[K_{sij}]$ を用いて、地下構造物の静的解析を試みた。

長さ L_{ij} の杭要素を図-1に示したような座標系におき、剛性マトリックス $[K_{pij}]$ 、 $[K_{sij}]$ を導く。節点力と節点変位は図-1の矢印を正とする。

剛性マトリックス $[K_{pij}]$ は、杭要素の節点 i 、 j において節点力とした仕事は杭要素内にひずみエネルギーとして貯えられるから、式(1)のように誘導される。一方、剛性マトリックス $[K_{sij}]$ は、杭要素に接した土の節点 i 、 j において節点力とした仕事は杭要素に接した土の内部にひずみエネルギーとして貯えられるから、式(2)のように誘導される。⁽¹⁾

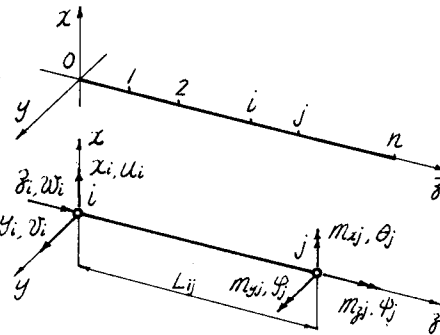


図-1 杭要素 ij の局所座標系

$$[K_{pij}] = \begin{bmatrix} U_i & V_i & W_i & \theta_i & \phi_i & \psi_i & U_j & V_j & W_j & \theta_j & \phi_j & \psi_j \\ \frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} \\ -\frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{pij}}{L_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{2EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & \frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 & 0 \\ \frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 & -\frac{6EI_{pij}}{L_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{pij}}{L_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_{ij}}{L_{ij}} \end{bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (1)$$

式(1)、(2)において、 L_{ij} は杭要素 ij の長さ、 I は杭の断面二次モーメント、 J は極二次モーメント、 S は断面積、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 E_{sx} 、 E_{sy} 、 E_{sz} 、 E_{st} は杭周辺の土の x 方向、 y 方向、 z 方向または z 軸回転方向の単位長さ当たりのばね係数である。

$$[K_{sij}] = \begin{bmatrix} u_i & v_i & w_i & \theta_i & \varphi_i & \psi_i & u_j & v_j & w_j & \theta_j & \varphi_j & \psi_j \\ \frac{13E_s L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13E_s L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & 0 & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{9E_s L_{ij}}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & 0 & \frac{13E_s L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9E_s L_{ij}}{70} & 0 & -\frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13E_s L_{ij}}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & 0 & -\frac{E_s L_{ij}^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & 0 & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 \\ -\frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{E_s L_{ij}^2}{140} & 0 & -\frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{3} \end{bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (2)$$

構造全体の基準座標系と抗の局所座標系との間の座標変換マトリックスを $[T]$ とすれば、2つの座標系による節変力 $\{X\}$ 、節変変位 $\{U\}$ の間には式(3)の関係がある。

$$\{X_o\} = [T]^T \{X_i\} \quad (3-1)$$

$$\{U_o\} = [T] \{U_i\} \quad (3-2)$$

抗要素とその周辺の土の剛性マトリックスを式(1)、(2)によって求め、それらとを重ね合わせて着目した抗の剛性方程式(4)をつくる。

$$\begin{Bmatrix} X_o \\ X_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{oo} & K_{oi} \\ K_{io} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_o \\ U_i \end{Bmatrix} \quad (4)$$

$X_o (X_o, Y_o, Z_o, M_{xo}, M_{yo}, M_{zo})$ は変位 $U_o (u_o, v_o, w_o, \theta_o, \varphi_o, \psi_o)$ を維持するために必要な力である。節変1, 2, ..., n には外力が作用しないから $X_i (X_i, Y_i, Z_i, M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}) = 0$ であり、 $U_i (u_i, v_i, w_i, \theta_i, \varphi_i, \psi_i)$ は未知節変変位である。抗の下端に境界条件を与えるときには、変位ベクトルとして U_n を設け、それに伴って力ベクトルとして X_n 、剛性マトリックスとして $K_{no}, K_{on}, K_{ni}, K_{in}, K_{nn}$ を設ければよい。式(4)から U_i を消去し、式(3)を用いれば、土々の抗の基準座標系による剛性方程式(5)を得る。

$$\{X_o\} = [T]^T [K_{oo} - K_{oi} K_{ii}^{-1} K_{io}] [T] \{U_o\} \quad (5)$$

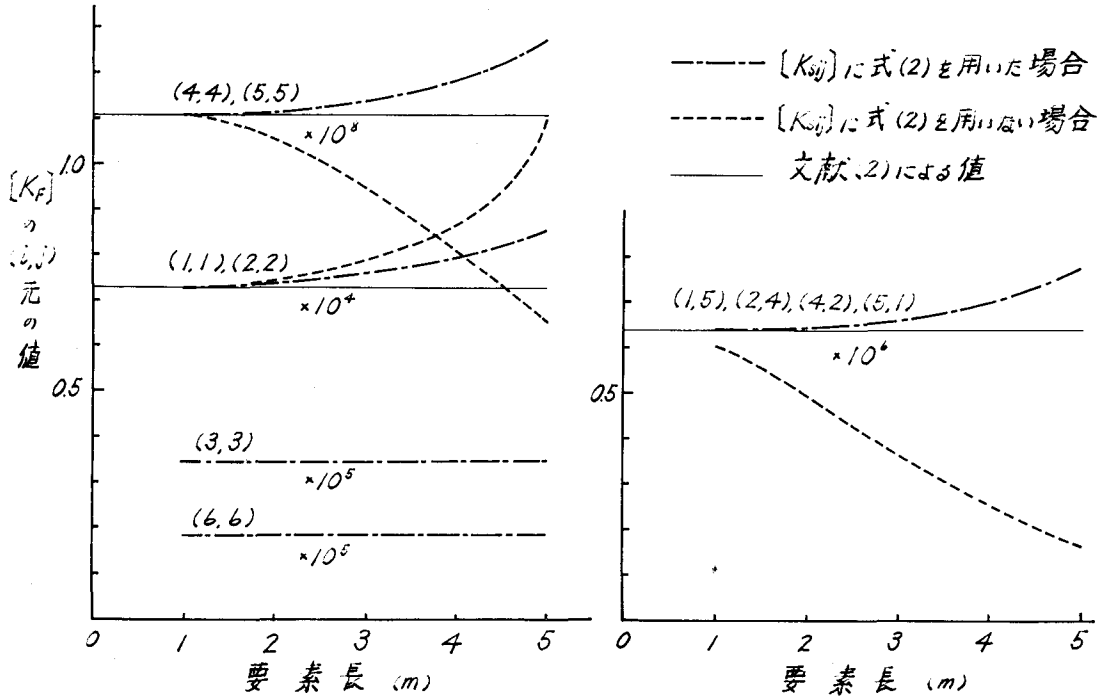
1つの基礎を構成している全ての抗の剛性マトリックスを式(5)によってつくり、これらを重ね合わせればその基礎の剛性マトリックス $[K_F]$ を得る。

この剛性マトリックス $[K_F]$ を、 $L = 15 \text{ m}$, $I = 4637 \text{ cm}^4$, $J = 9274 \text{ cm}^4$, $S = 113.1 \text{ cm}^3$, $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $G = 0.8 \text{ kg/cm}^2$; $E_{sx} = E_{sy} = 42.0 \text{ kg/cm}^2$, $E_{sz} = 25.1 \text{ kg/cm}^2$, $E_{st} = 12.5 \text{ kg}$ の単抗について、要素数15として求めれば式(6)を得る。

$$[K_F] = \begin{bmatrix} 0.7333\text{E} 04 & 0. & 0. & 0. & -0.6397\text{E} 06 & -0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.7333\text{E} 04 & 0. & 0. & 0.6397\text{E} 06 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.3497\text{E} 05 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.6397\text{E} 06 & 0. & 0. & 0. & 0.1116\text{E} 09 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -0.6397\text{E} 06 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1116\text{E} 09 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.1883\text{E} 05 & 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \quad (6)$$

この結果は文献(2)の式(18)で求めた値と一致する。

また、式(6)と同一条件の剛性マトリックス $[K_F]$ を、 $[K_{sij}]$ として式(2)を用いた場合と、式(2)のかわりにその元が $(1,1), (7,7)$ で $\frac{E_s L_{ij}}{2}$ 、 $(2,2), (8,8)$ で $\frac{E_s L_{ij}}{2}$ 、 $(3,3), (9,9)$ で $\frac{E_s L_{ij}}{2}$ 、 $(6,6), (12,12)$ で $\frac{E_s L_{ij}}{2}$ であり、他は全て0であるマトリックスを用いた場合について、要素長 L_{ij} を変化させて求め、要素長と $[K_F]$ の元の値との関係を図-1に示す。



グラフ-1 杭の要素長と基礎の剛性マトリックスの元の値との関係

ここに述べた方法によって剛性マトリックス $[K_F]$ を求めれば、

1. 杭の断面の変化、地層の変化を容易に評価できる。
2. 杭要素の分割数を減らすことができる。
3. 杭下端の6つの境界条件を自由端、ヒンジ端および固定端の中から任意に選択できる。

などの利点がある。

図-2 に示した立体ラーメンを基礎の弾性特性を考慮して解くためには、夫々の杭基礎の剛性マトリックス $[K_F]$ を立体ラーメンの全体剛性マトリックスの ☐ 印の所に加えて式(7)を得る。

$$\{X\} = [K]\{u\}$$

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & & & & & & & \\ & \square & & & & & & \\ & & \square & & & & & \\ & & & \square & & & & \\ & & & & \square & & & \\ & & & & & \square & & \\ & & & & & & \square & \\ & & & & & & & \square \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{Bmatrix}$$

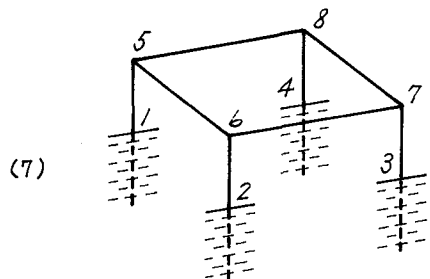
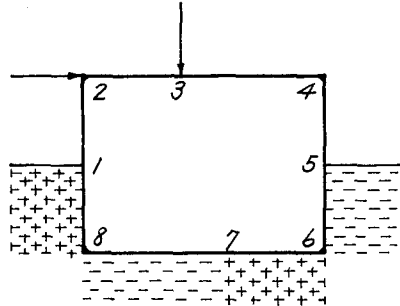
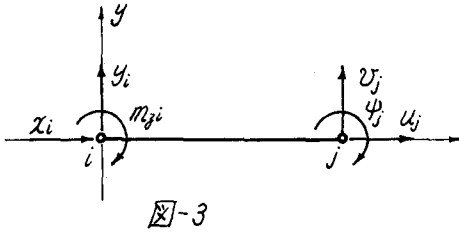


図-2 弾性支持されたラーメン

式(7)において X_i, u_i ($i=1, \dots, 8$) はまづ6つの元からなっている。この剛性マトリックス $[K]$ は特異でないから、各節点の変位 $\{u\}$ は直ちに求められる。変位 $\{u\}$ を得れば、通常の方法によって各部材の部材力が得られる。また、必要ならば、式(1),(2)によって、杭の部材力と地盤反力を求めることができる。

剛性マトリックス $[K_{pij}], [K_{sij}]$ を地下構造物の静的解析に応用する。部材の座標系を図-3のようにとると、式(1),(2)から、この部材の剛性マトリックス $[K_{bij}]$ とこの部材に接している土の剛性マトリックス $[K_{sij}]$ は式(8),(9)のようになる。



$$[K_{bij}] = \begin{Bmatrix} u_i & v_i & \psi_i & u_j & v_j & \psi_j \\ \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{ij}}{L_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{12EI_{ij}}{L_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} \\ 0 & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} & 0 & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & \frac{2EI_{ij}}{L_{ij}} \\ -\frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 & \frac{ES_{ij}}{L_{ij}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{ij}}{L_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & 0 & \frac{12EI_{ij}}{L_{ij}^3} & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} \\ 0 & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & \frac{2EI_{ij}}{L_{ij}} & 0 & \frac{6EI_{ij}}{L_{ij}^2} & \frac{4EI_{ij}}{L_{ij}} \end{Bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (8)$$

$$[K_{sij}] = \begin{Bmatrix} u_i & v_i & \psi_i & u_j & v_j & \psi_j \\ \frac{E_s L_{ij}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13E_s L_{ij}^2}{35} & \frac{13E_s L_{ij}^2}{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_s L_{ij}}{6} & 0 & 0 & \frac{E_s L_{ij}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9E_s L_{ij}^2}{70} & \frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & 0 & \frac{13E_s L_{ij}^2}{35} & 0 \\ 0 & \frac{13E_s L_{ij}^2}{420} & \frac{E_s L_{ij}^2}{140} & 0 & \frac{11E_s L_{ij}^2}{210} & \frac{E_s L_{ij}^2}{105} \end{Bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (9)$$

図-4 に示した構造物を解析するためには、部材1-2, 2-3, 3-4, 4-5 に対しては式(8)を、また部材5-6, 6-7, 7-8, 1-8 に対しては式(8)と(9)の和をとったマトリックスを各部材の部分剛性マトリックスとして、通常のマトリックス構造解析法によればよい。

参考文献

- (1) 宮原 玄 「土の弾性特性の行列表示について」
昭和45年土木学会年次学術講演会 Ⅲ-7
- (2) 栗林栄一, 他 「橋梁基礎の剛性マトリックス」
昭和45年土木学会年次学術講演会 I-220