I-127 非線型有限変形法による骨組構造物の大変形解析

（株）宮地鉄工所 正員 後藤 茂夫

（株）宮地鉄工所 正員 大西 聿紀

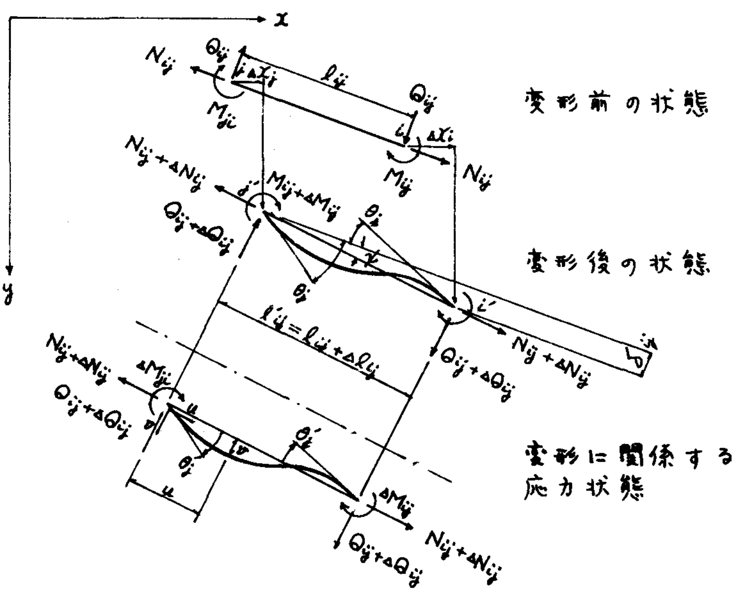
（株）宮地鉄工所 〇正員 大槻 護

I．論文要旨

本論文で対象とする構造系においては、各構成部材の応力、ひずみ状態は弾性域をこえることは無いが、その構造物の節点変位および部材の回転量などが、有限変形とみなされるような微少量にとどまらず、極めて著じるしい大変形をすると考える。したがって節点変位と部材変形の適合条件式は、十分に厳密なものでなければならず、安易な省略は許されない。また、解式の剛性マトリックスを構成するための基本式となる非線型材端力式も、反復計算において十分な収束性の得られるように配慮された厳密式であることが必要である。

本文における大変形法（非線型有限変形法）の基本的な考え方は、後藤の有限変形法および立体トラスに対する大変形法などの既論文と同様に、先行荷重と先行部材力によるつり合い構造系を既知として、付加荷重による新たな変形と部材力増分を求める点にあるが、もちろん初期状態は任意に設定できるので、無応力状態からの厳密解を求めることもできる。

大変形法における支配的な要素は、軸力の変化と部材の極端な回転にあり、本理論は軸力部材に対する考察を、曲げ剛性を有する骨組構造系へ拡張して適用を試みたもので、架設途上のアーチ橋などに好便であると考える。



II．材端力式

右図の ij 部材に対して

$\alpha_{ij} = (x_i - x_j)/\ell_{ij}$

$\beta_{ij} = (y_i - y_j)/\ell_{ij}$

$\Delta x_i = x_i' - x_i$

$\Delta y_i = y_i' - y_i$

$\Delta x_j = x_j' - x_j$

$\Delta y_j = y_j' - y_j$

$\Delta x_{ij} = \Delta x_i - \Delta x_j$

$\Delta y_{ij} = \Delta y_i - \Delta y_j$

$\delta_{ij} = -\beta_{ij}\Delta x_{ij} + \alpha_{ij}\Delta y_{ij}$

（以下添字の ij を省略）

$\varepsilon = \delta/\ell = \sin\psi$ とおくと

$\psi = \sin^{-1}\varepsilon = \varepsilon\nu = \nu\cdot\delta/\ell$，ただし $\nu = 1 + \frac{1}{6}\varepsilon^2 + \frac{3}{40}\varepsilon^4 + \frac{15}{336}\varepsilon^6 + \cdots\cdots$ とする。

部材の伸び $\Delta\ell$ は厳密に次式で表わされる。

$$\Delta\ell = \ell\omega\chi/2 \;,\quad \text{たゞし} \quad \omega = 2(\alpha\Delta x+\beta\Delta y)/\ell + (\Delta x^2+\Delta y^2)/\ell^2$$

$$\chi = 1-\frac{1}{4}\omega+\frac{1}{8}\omega^2-\frac{5}{64}\omega^3+\frac{7}{128}\omega^4-\frac{21}{512}\omega^5+\cdots\cdots$$

部材の伸び剛性を EA，曲げ剛性を EI とし，曲げモーメント，せん断力に対して軸長の変化を無視すれば、変形後の部材軸と任意点を（u，v）で表わし、曲げモーメントの微分方程式を解いて

$$\Delta N = F\Delta\ell$$

$$\text{たゞし}\quad F = EA/\ell \;,\quad \begin{Bmatrix}\Delta M_{ij}\\ \Delta M_{ji}\end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix}k, & k'\\ k', & k\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i'\\ \Delta\theta_j'\end{Bmatrix} = \frac{EI}{\ell}\begin{bmatrix}k, & k', & -\frac{k+k'}{\ell}\nu\\ k', & k, & -\frac{k+k'}{\ell}\nu\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta\theta_i\\ \Delta\theta_j\\ \delta\end{Bmatrix}$$

係数行列中の k，k' は複雑な分数式となるが、十分な精度をもって次の簡単な近似式に置き換えることができる。

$$k = 4+\frac{2}{15}\frac{N+\Delta N}{EI}\ell^2-\frac{11}{6300}\left(\frac{N+\Delta N}{EI}\right)^2\ell^4 \;,\quad k' = 2-\frac{1}{30}\cdot\frac{N+\Delta N}{EI}\ell^2+\frac{13}{12600}\left(\frac{N+\Delta N}{EI}\right)^2\ell^4$$

また、せん断力の増分は

$$\Delta Q = (Q+\Delta Q)-Q = -(\Delta M_{ij}+\Delta M_{ji})/\ell-(Q+\Delta Q)\Delta\ell/\ell$$

となる。

こゝで、$K = 2EI/\ell^3$，$\mu_1 = (N+\Delta N)/30\ell$，$\mu_2 = (N+\Delta N)^2\ell/12600EI$，$\lambda = (Q+\Delta Q)/\ell$ とすると

$$\Delta M = \Delta M_{ij} = (2K+4\mu_1-22\mu_2)\ell^2\Delta\theta_i+(K-\mu_1+13\mu_2)\ell^2\Delta\theta_j+3(K+\mu_1-\tfrac{8}{3}\mu_2)\ell\nu(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)$$

$$\Delta Q = -3(K+\mu_1-\tfrac{8}{3}\mu_2)\ell\Delta\theta_i-3(K+\mu_1-\tfrac{8}{3}\mu_2)\ell\Delta\theta_j-6(K+\mu_1-\tfrac{8}{3}\mu_2)\nu(\beta\Delta x-\alpha\Delta y)-\lambda\Delta\ell$$

i 点において、ij 部材材端力の共通座標系成分が、X，Y（変形前）から各々 $X+\Delta X$，$Y+\Delta Y$（変形後）と変化することより，材端力の増分は、

$$\begin{Bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}\alpha, & -\beta\\ \beta, & \alpha\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\alpha, & -\Delta\beta\\ \Delta\beta, & \Delta\alpha\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{Bmatrix}N+\Delta N\\ Q+\Delta Q\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\alpha, & -\beta\\ \beta, & \alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}N\\ Q\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha, & -\beta\\ \beta, & \alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta N\\ \Delta Q\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\alpha, & -\Delta\beta\\ \Delta\beta, & \Delta\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}N+\Delta N\\ Q+\Delta Q\end{Bmatrix}$$

であるから第1項に ΔN，ΔQ，第2項に $\Delta\alpha = (\Delta x-\alpha\Delta\ell)/(\ell+\Delta\ell)$，$\Delta\beta = (\Delta y-\beta\Delta\ell)/(\ell+\Delta\ell)$ を代入して $\Delta\ell = \chi(\alpha\Delta x+\beta\Delta y+\alpha\Delta x^2/2\ell+\beta\Delta y^2/2\ell)$，$\bar{\mu} = (N+\Delta N)/(\ell+\Delta\ell)$，$\bar{\lambda} = (Q+\Delta Q)/(\ell+\Delta\ell)$ とおいて整理し i 点側の変形（Δx_i，Δy_i，$\Delta\theta_i$）および j 点側の変形（Δx_j，Δy_j，$\Delta\theta_j$）についてまとめると次式を得る。

$$\begin{Bmatrix}\Delta X\\ \Delta Y\\ \Delta M\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}-6\beta^2\nu\Delta+\chi\alpha t+\chi\frac{t}{2\ell}\Delta x^*, & 6\alpha\beta\nu\Delta+\chi\beta t+\chi\frac{t}{2\ell}\Delta y^*, & 3\ell\beta\Delta\\ -6\alpha\beta\nu\Delta+\chi\alpha t'+\chi\frac{t'}{2\ell}\Delta x^*, & 6\alpha^2\nu\Delta+\chi\beta t'+\chi\frac{t'}{2\ell}\Delta y^*, & -3\ell\alpha\Delta\\ 3\ell\beta\nu\Delta, & -3\ell\alpha\nu\Delta, & \ell^2\Delta'\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta y_i\\ \Delta\theta_i\end{Bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix}-6\beta^2\nu\Delta+\chi\alpha t+\chi\frac{t}{2\ell}\Delta x^*, & 6\alpha\beta\nu\Delta+\chi\beta t+\chi\frac{t}{2\ell}\Delta y^*, & 3\ell\beta\Delta\\ -6\alpha\beta\nu\Delta+\chi\alpha t'+\chi\frac{t'}{2\ell}\Delta x^*, & 6\alpha^2\nu\Delta+\chi\beta t'+\chi\frac{t'}{2\ell}\Delta y^*, & -3\ell\alpha\Delta\\ 3\ell\beta\nu\Delta & -3\ell\alpha\nu\Delta & -\ell^2\Delta''\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta x_j\\ \Delta y_j\\ \Delta\theta_j\end{Bmatrix}$$

たゞし　$\Delta x^* = \Delta x$，$\Delta y^* = \Delta y$，$\Delta = K+\mu_1-\frac{8}{3}\mu_2$，$\Delta' = 2K+4\mu_1-22\mu_2$，$\Delta'' = K-\mu_1+13\mu_2$，$t = (F-\bar{\mu})\alpha+(\lambda+\bar{\lambda})\beta$，$t' = (F-\bar{\mu})\beta-(\lambda+\bar{\lambda})\alpha$ である。

Ⅲ．構造物への適用

ij 部材の材端力増分（ΔX_{ij}，ΔY_{ij}，ΔM_{ij}）をすべての j について集計し、i 点の付加荷重に等しいとおくと、i 点における幾何学的つり合い条件式ができるので、通常の有限変形法の場合と同様である。

反復計算については、第1回は $\chi=1$，$\Delta x^*=\Delta y^*=0$ として変形を連立一次方程式より求め，ω の第2項を省略して第2回分の部材力パラメータを計算する。第2回からは、χ を修正し前回の Δx^*，Δy^*（第1回も値が計算できる）を剛性行列に代入して、所定の精度に達するまで反復計算すれば良い。χ および部材力を修正する前に Δx^*，Δy^* を収束させる小反復を行えば、厳密な収束性が得られる。