

法政大学
東日交通コンサルタント

正員 大北羊三
正員 ○白井英夫

1. まえがき

一般に、骨組構造物は微小変形であるという仮定のもとで解析なされてきました。しかしながら、つり橋、耐風策、アーチ等構造物においては、材料がまだ弾性範囲内にあるにもかかわらず変形が大きくなり、無視することが不可能となる。従って、微小変形の仮定のもとで誘導された解式では解析が不可能となり有限変形を考慮した式の誘導が必要となった。

近年、有限変形を考慮した非線形の解式及びき法が、J. H. Argyris, J. A. Jennings, J. T. Oden, H. C. Martin, R. H. Mallitt, P. V. Marcal, C. H. Powell, 大北, 堀井, 川原, 後藤等各氏によって発表されている。しかしながら各論文ともに例題などが、かなり異なり、同じ結果に収束するものかどうかの研究がなされていず、個人の判断をもって良否を決定されているにすぎない。従って、本研究では、数人の式の剛性方程式を比較し、それをもって、ニミの例題について解いた。またこの比較の前に、回転が大きい場合の新しい剛性マトリックスの誘導も試みた。

2 論理展開とフローチャート

一般に、本解析に流れる数学的モデル、フローチャート等は、細部を除いてだいたい一致するのだから、まず始めにこれを述べる。

有限変形法においては、断面力は変形後の部材断面に作用すると考えなければならぬから、変形後の断面力は変形量の函数となる。

$$[K(x)]x = P \quad (1)$$

上式は、非線形の連立方程式となる。今、現在位置より変形が dx だけ増加したとすると(1)式は、

$$[K(x+dx)](x+dx) = P \quad (2)$$

(2)式を展開して

$$[K(x) + k(x, dx)]x + [K(x)]dx = P \quad (3)$$

上式において $[k(x, dx)]x = [k(x)]dx$ とおき整理すると

$$dx = [K(x) + k(x)]^{-1} [P - K(x)x] \quad (4)$$

これは、ニュートンの近似公式に相当すると考えられる。

この(4)式をもとにした、有限変形法のプログラムの、フローチャートを図(1)に示す。

(3) 回転が大きい場合の剛性マトリックスの誘導
全ポテンシャルエネルギーは、

$$\int_V \delta \epsilon_i \epsilon_i dV - \delta g_R P_R = 0 \quad (5)$$

また歪を、変位函数として、

$$\epsilon_i = f_i(\{s\}) \quad (6)$$

従って微少増分は、

$$\delta \epsilon_i = \frac{\partial f_i}{\partial g_R} \cdot \delta g_R \quad (7)$$

また応力と歪の関係より

$$\sigma_i = E_{ij} \epsilon_j = E_{ij} f_j \quad (8)$$

(8), (7)式を(5)式に代入して整理すると、

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial g_R} E_{ij} f_j dV = P_R \quad (9)$$

$E_{ij} = E_{ji}$ という関係があるゆえに(9)式は

$$\frac{\partial}{\partial g_R} \int_V \frac{1}{2} f_i E_{ij} f_j dV = P_R \quad (10)$$

となり、またここで f は次式のようにとると、

$$f = \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 \sqrt{\frac{d^2 u(x)}{dx^2}} \quad (11)$$

これを(10)式に代入してマトリックスの型に書くと

$$U = \int_x \left(\frac{du}{dx} \quad \frac{dv}{dx} \quad \frac{dv}{dx} \right) \left\{ \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} + \frac{EA}{6} \begin{bmatrix} 0 & \frac{dv}{dx} & 0 \\ \frac{dv}{dx} & \frac{dv}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dv}{dx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{du}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \\ \frac{dv}{dx} \end{bmatrix} dx \quad (12A)$$

これを簡単に、

$$U = \int_x [d]^T \left[\frac{EA}{2} [K] + \frac{EA}{6} [N1] + \frac{EA}{12} [N2] \right] [d] dx \quad (12B)$$

そして軸方向変位を一次式、横方向変位を座屈の一般式でもって仮定する。すなわち

$$B = \begin{bmatrix} u \\ v \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ 0 & 0 & 1 & x & \sin kx & \cos kx \end{bmatrix} \quad (13)$$

ここで $k = \sqrt{Na/EI}$ である $D = [u_x, v_x, v_{xx}]$ は次のようになる。

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & k \cos kx & -k \sin kx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k^2 \sin kx & -k^2 \cos kx \end{bmatrix} \quad (14)$$

部材端の境界条件を導入して、 $\beta_1 \sim \beta_6$ を求める式は、

$$B = C \delta$$

ここで

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(B-C-1) & A(B-Lc) & 0 & A(C-1) & A(L-B) \\ 0 & -Aks & A(C-1) & 0 & Aks & A(C-1) \\ 0 & As & -A(D-5E) & 0 & -As & -A\left(\frac{C-1}{2}\right) \\ 0 & A(C-1) & -A(B-Lc) & 0 & -A(C-1) & -A(L-B) \end{bmatrix} \quad (15)$$

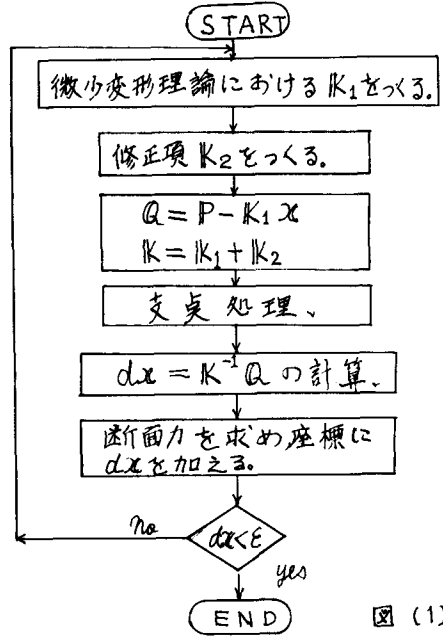


図 (1)

ここで

$$\delta^T = [u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2], \quad A = \frac{-l}{(2 - k_S l - 2c)}, \quad B = \frac{S}{r_2},$$

$$D = \frac{l - c}{r_2}, \quad C = \cos kx, \quad S = \sin kx$$

また、部材座標と絶対座標の間には次の関係がある。

$$\delta = A \beta \quad (16)$$

Aはよく知られている変換マトリックスです。従って

$$\beta = CA \delta \quad (17)$$

$$d = DB \quad (18)$$

これらき、(12B)式に代入して

$$U = B^T \left\{ \frac{1}{2} [\bar{K}] + \frac{1}{6} [\bar{N}_1] + \frac{1}{12} [\bar{N}_2] \right\} \beta \quad (19)$$

ただし

$$\bar{K} = \int_x EA [D^T \bar{K} D] dx$$

$$\bar{N}_1 = \int_x EA [D^T \bar{N}_1 D] dx$$

$$\bar{N}_2 = \int_x EA [D^T \bar{N}_2 D] dx$$

これ以後は \bar{N}_2 の項は四次の微小項として無視する。ここで \bar{K} 、 \bar{N}_1 は次のマトリックスとなる。

$$\bar{K} = \int_x EA \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k^2 S^2 I}{A} & \frac{k^2 SI}{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{k^2 CSI}{A} & \frac{k^2 c^2 I}{A} \end{pmatrix}, \quad \bar{N}_1 = \int_x EA \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ux & uxkc & -uxks \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & ux & 0 & ux & uxkc & -uxks \\ 0 & kcx & 0 & uxkc & uxk^2 & -uxk^2 c \\ 0 & kSx & 0 & -uxks & -uxk^2 c & uxk^2 s^2 \end{pmatrix}$$

目的とする解は、全ポテンシャルエネルギーを最小にする変位であるから、(19)式を微分して、

$$\left\{ [K] + \frac{1}{2} [N_1] \right\} \beta = [P] \quad (20)$$

この式において、Kと N_1 は次式で与えられます。

$$K = A^T C^T \bar{K} C A$$

$$N_1 = A^T C^T \bar{N}_1 C A$$

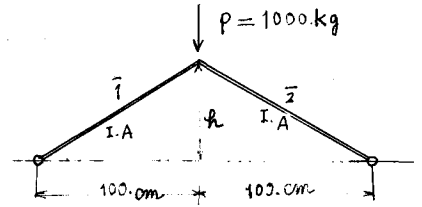
実際の剛性マトリックスは、Kと N_1 の x について積分を実行したものであるが長い式となるのでここでは除いた。また、形状変化にもなる修正項が軸力と曲げモーメントを修正する形が入ってくるが、今回はコンピュータの容量が小さかったので除いた。

4 比較

ここで比較した式は、

- (A) R.H. Mallet, P.V. Marcal
- (B) H.C. Martin
- (C) G.H. Powell
- (D) 大地羊三
- (E) R.K. Livesly

の五人の式を比較した。その数値計算例は図(2)に示す構造物を用いた。計算値は下に示す。



構造物のデクメンション

	h cm	A cm ²	I cm ⁴
M1	7.5	5	10.41
M2	-10	5	10.41

図 (2)

5 結論

五式ともに、誤差範囲内で同一の解に収束すると考えられる。種々の構造物を解いた結果、本当の tangent stiffness matrix でできていないと考えられる。従って非線形の tangent stiffness matrix は完全でなくとも近似的なものでもよいことがわかる。次の回転の頂において、Powell と、本論文の式において、剛性マトリックスの(3, 1), (1, 3)の項が大きく他のものと異なっていることから、座屈当の検当をする時には、回転を考慮した式を使用すべきであることが示された。

載下桌下のタワミ

	くり返回数	Martin	Mallet	Powell	大地	Livesly	本論文
		M 1	1	0.7688	0.7688	0.7688	0.7688
	2	1.0063	1.0408	0.9647	0.9158	0.9175	0.9114
	3	0.9730	0.9780	0.9827	0.9614	0.9624	0.9594
	4	0.9893	0.9849	0.9846	0.9766	0.9772	0.9749
	5	0.9827			0.9819	0.9821	0.9798
M 2	1	0.4552	0.4552	0.4552	0.4552	—	—
	2	0.4226	0.4215	0.4212	0.4176	—	—
	3	0.4217	0.4216	0.4216	0.4221	—	—

微小変形と有限変形(終回)の剛性マトリックスの比

Martin

1.002	0.871	0.920
0.871	0.635	1.060
0.920	1.060	0.885

Powell

1.002	0.865	0.698
0.865	0.720	0.997
0.698	0.997	0.870

Livesly

1.002	0.871	0.820
0.871	0.904	0.943
0.820	0.943	0.880

Mallet

1.002	0.895	0.895
0.895	0.831	1.002
0.895	1.002	1.000

大地

1.002	0.871	0.872
0.871	0.912	1.002
0.872	1.002	1.001

本論文

1.001	0.963	5.103
0.963	0.897	1.006
5.103	1.006	0.951