# I-125 Hermite 階差法による構造物の固有振動解析

岐阜大学工学部　正員　井上 肇

電子計算機などの発達につれて，解析的には扱いにくい構造物を数値的に取り扱うところの，有限要素法によって代表される，いわゆる"構造物の行列解析法"については，多くの研究がなされている。このような数値解析において取り扱うべき未知量の数が，できるだけ小さく，かつ得られた結果の精度ができるだけ高いことは，より小規模の計算システムによってでも，容易に信頼性の高い解析結果を計算できることになり，多くの数値解析が，一面このような面へと指向していると考えられる。たとえば，有限要素法と階差法とでは，同一の着目点（前者では，節点，後者では分割点）数である場合，取り扱われるべき未知数は，前者の方が多く，当然のことながら精度もよい。しかしこれを同一の未知量の数で計算されたときの精度については，前者に圧倒的に有利であるとは限らない。そこで，階差法において単なる高精度階差法ではなく，もっと一般的に，微分方程式の微係数の階差表現を扱い，その1部については，さきに報告した。[1] すなわち，Hermite階差法（Mehrstellenverfahren）[2] によって，はりの静的ならびに自由振動についての解析結果は，とくに等分布荷重や，固有振動状態での解が，きわめて高精度であることが明らかとなった。しかし，この方法においての欠点は，より高い近似を微係数に与えようとすれば，構造解析の1つの目的である，単位荷重による変形，断面力等（すなわち影響線）が，全く意味のないものが求められてしまうことであろう。これは，階差法のもつ，全体的な「微分方程式の近似表現」と云った，宿命から来るものと考えられる。

Hermite 階差法による微係数の階差表示は，つぎの式で求められる。

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=S_{k1}}^{S_{k2}} A_{ki} f^{(k)}(x+ih)\right\} + \sum_{i=S_{01}}^{S_{02}} a_i f(x+ih) = 0 \qquad (1)$$

ここで，$f^{(k)}$；関数 $f$ の $k$ 階微係数，$S_{ki}$；$k$ 階微係数をとるべき巾，である。(1) の行列表示は

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_k \mathbf{f}^{(k)} + \mathbf{A}_0 \mathbf{f}_0 = 0 \qquad (1)'$$

計算例としては，解析的には，かなり面倒なアーチの固有振動数と，その固有関数を求める。アーチの釣合い条件式と断面力と変形との関係は，半径，接線方向変位をそれぞれ $u$，$w$ として[3]

$$Q' + N + q_x R = 0, \quad N' - Q + q_z R = 0, \quad M' - Q\cdot R = 0 \qquad (2)$$

$$N = EA(w' - u)/R, \qquad M = -EI(u'' + w')/R^2 \qquad (3)$$

$Q'$, $N'$, $M'$ は，せん断力，軸方向力，曲げモーメントの座標（極座標）による1階微係数である。Hermite 階差法によって

$$\left.\begin{array}{lll}
Q'; & \mathbf{A}_1\mathbf{Q}' + \mathbf{A}_0\mathbf{Q} = 0, & \mathbf{Q}' = -\mathbf{N} - \mathbf{R}\cdot\mathbf{q}_x \\
N'; & \mathbf{A}_1\mathbf{N}' + \mathbf{A}_0\mathbf{N} = 0, & \mathbf{N}' = \mathbf{Q} - \mathbf{R}\cdot\mathbf{q}_z \\
M'; & \mathbf{B}_1\mathbf{M}' + \mathbf{B}_0\mathbf{M} = 0, & \mathbf{M}' = \mathbf{R}\mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} = -(\mathbf{B}_1\mathbf{R})^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{M} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_0\mathbf{M} \\
W'; & \bar{\mathbf{A}}_1\mathbf{W}' + \bar{\mathbf{A}}_0\mathbf{W} = 0, & \mathbf{W}' = -\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}\bar{\mathbf{A}}_0\mathbf{W} = -\mathbf{G}_1\cdot\mathbf{W} \\
U''; & \mathbf{B}_1\mathbf{U}'' + \bar{\mathbf{B}}_0\mathbf{U} = 0, & \mathbf{U}'' = -\bar{\mathbf{B}}_1^{-1}\bar{\mathbf{B}}_0\mathbf{U} = -\mathbf{G}_2\cdot\mathbf{U}
\end{array}\right\} \qquad (4)$$

(4) を用いて, (2), (3) を表現すれば, ( $b_0 = I_0/R_0^2$, $\bar{\alpha} = R_0A_0/I_0$, $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$ ; 圏比によりきまる行列, $\mathbf{R}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{R}$ )

$$\begin{bmatrix} -A_1 & A_0 \\ A_0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 q_x \\ R_1 q_z \end{bmatrix} \qquad (5), \qquad \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = Eb_0 \begin{bmatrix} K_2 & \\ & \bar{\alpha}K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ -I & -G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \qquad (6)$$

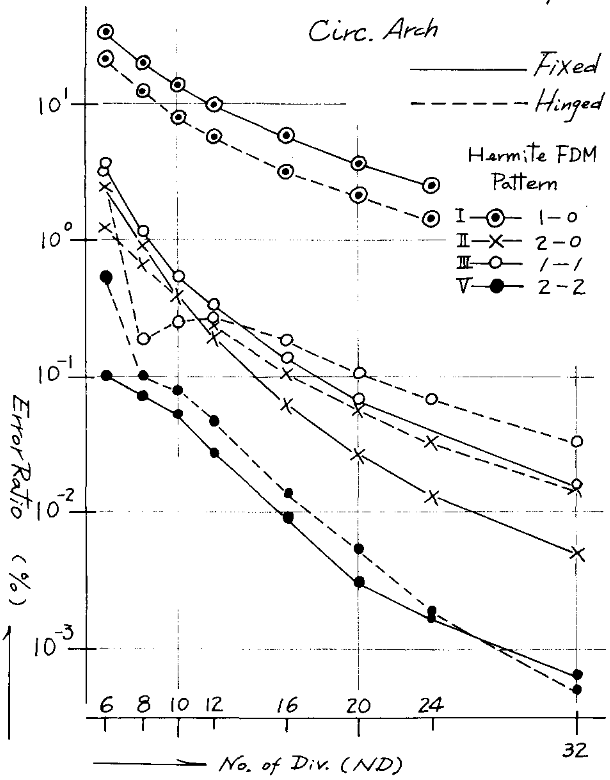
$$Eb_0 \begin{bmatrix} A_0 & -A_1 \\ A_1 & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R^{-1}B_1^{-1}B_0 & \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_2 & \\ & \bar{\alpha}K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 & G_1 \\ -I & -G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 q_x \\ R_1 q_z \end{bmatrix} \qquad (7)$$

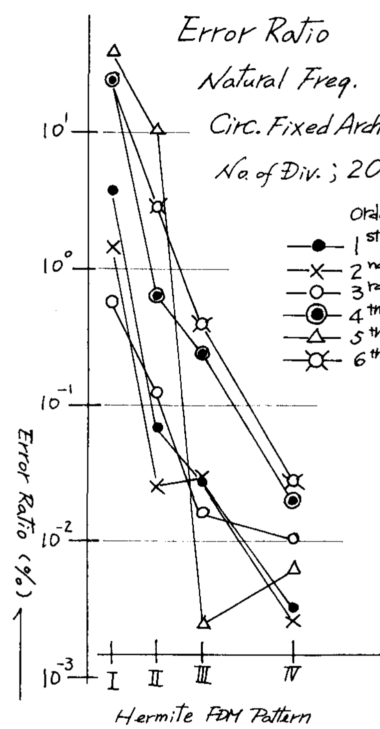
自由振動時では, アーチの単位長さ当りの質量を $m$, 円振動数を $\omega$ $q_x = -m \cdot \ddot{U}$ etc. として

$$Eb_0 \cdot H \cdot L \cdot K^* \cdot G^* \cdot U^* = \omega^2 m R^* U^* = A^* \cdot U^* \qquad (8)$$

計算は, $R = 50^m$, 中心角 $2 \times (28^\circ 4' 21'')$, アーチリブ厚 1.918 m の一定断面円アーチについて行ない, 厳密解は Waltking[3] によって求めた。計算結果の一例を図に示すが, Hermite Pattern Ⅰは普通の, Ⅲは高精度, Ⅲ は Hermite型の 1−1, Ⅴは同じく 2−2 の階差を用いたものである。 微係数の階差表示に含まれる誤差は, 理論的には, Ⅱ, Ⅲ ともに同じ Order であるが, 全体的には, Ⅲ の方がより高い近似を与えている。これはⅢにおいて, 荷重に関係する項が, よく近似されていると考えられる。固有振動数, 固有関数ともに, Ⅰは使用に耐えない。 Ⅴで, ND = 10 程度で十分使用に供せられる精度に到達している。

Error Ratio, 1st Natural Freq.





1) 井上 ; Hermitian 階差法による構造物の解析, 第25回土木学会年次学術講演会概要 Ⅰ. 345, (1970)
2) Collatz, L. ; The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd ed (1966)
3) Waltking, F. W. ; Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing.-Archiv, V. 429 (1934)
4) Pestel, E. ; Dynamic Stiffness Matrix Formulation by means of Hermitian Polynomials, Proc. of 1st Int. Congress on Matrix Method in Structural Mechanics, 1965, Vol. I, 479