I-124 剛節骨組構造物の動的解析

京都大学 工学部 正員 小西一郎
京都大学 工学部 正員 白石成人
京都大学 工学部 学生員 谷口健男

1. まえがき

骨組構造物の構造要素として，部材と節点が考えられ，それらの間の組み合わせ関係を規定するものとして，Branch Node Incidence Matrix（A）が存在する[2)]。従来，構造解析の分野においては，この性質は，静的解析のみに用いられ，動的解析には用いられなかった。しかしながら，この性質は構造物への荷重の種類，あるいは，それによる系の応答の種類に対しては不変であるから，動的解析にも適用しうる。本研究においては，骨組構造物の基礎運動方程式を，その系のもつ位相幾何学的特性（A）に注目して導びき，この特性の導入による利点をさぐる。

2. 骨組構造物の運動方程式

与えられた骨組構造物を構成する全ての部材を各々，任意個数のSegmentに分割し，その全てのSegmentsの両端を任意に始端と終端に分類する。全てのsegmentsと分割点との間の組み合わせ関係より，Branch-Node Incidence Matrix A を求めることができる。座標系は，1). O-xyz座標系；1つのglobal座標系　2). A-xyz座標系；全ての分割点，節点に定めた座標系，3). B-ξηζ座標系；各々のsegmentの始端に原点をおき，ξ軸をsegmentの軸方向と一致させた座標系。また，O-xyz→B-ξηζ，およびO-xyz→A-xyzへの変換行列を各々，$\hat{T}_{io}$，T_{jo}とする。i-th segmentについて，その終端を固定した片持ばりを考えると，その振動方程式は，(damping = 0と仮定)[1)]

$$\mathbf{m}_i \ddot{\mathbf{x}}_i + \mathbf{k}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{f}_i \tag{1}$$

ここで $\mathbf{m}_i$；i-th segmentのmass matrix，$\mathbf{k}_i$；i-th segmentのstiffness matrix，

$\mathbf{x}_i$；deflection，$\mathbf{f}_i$；i-th segmentのmember-end force vector

上式(1)は，B-ξηζ系での式である。変換行列$\hat{T}_{io}$を用いてglobal coordi. に変換する。

$$\mathbf{f}_i = \hat{T}_{io} \hat{\mathbf{f}}_i \tag{2}$$

$$\mathbf{x}_i = (\hat{T}_{io}^{-1})^t \hat{\mathbf{x}}_i , \qquad \ddot{\mathbf{x}}_i = (\hat{T}_{io}^{-1})^t \ddot{\hat{\mathbf{x}}}_i \tag{3}$$

(2),(3)式を(1)式に代入し，整理すると，

$$\hat{\mathbf{m}}_i \ddot{\hat{\mathbf{x}}}_i + \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{x}}_i = \hat{\mathbf{f}}_i \tag{4}$$

ここで，

$$\hat{\mathbf{m}}_i = (\hat{T}_{io})^{-1} \mathbf{m}_i (\hat{T}_{io}^{-1})^t , \qquad \hat{\mathbf{k}}_i = (\hat{T}_{io})^{-1} \mathbf{k}_i (\hat{T}_{io}^{-1})^t \tag{5,6}$$

(4)式は，global coordinate systemからみたi-th segmentの振動方程式であり，(5),(6)式は，global coordinate systemにおける，i-th segmentのmass matrix，及びstiffness matrixである。

いま，分割された構造物に，mコのsegmentsがあるとするとき，次のベクトル，行列を定義する。

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_1 \\ \hat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}_m \end{Bmatrix} , \qquad \hat{\mathbf{f}} = \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_1 \\ \hat{\mathbf{f}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{f}}_m \end{Bmatrix} \tag{7,8}$$

$$\hat{\mathbb{M}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 & & & 0 \\ & \hat{m}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{m}_m \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbb{K}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & & & 0 \\ & \hat{k}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{k}_m \end{bmatrix} \tag{9, 10}$$

(7, 8, 9, 10) 式を用いて、構造物を構成する全 z の Segments の振動方程式を書くと、

$$\hat{\mathbb{M}}\,\ddot{\hat{x}} + \hat{\mathbb{K}}\,\hat{x} = \hat{f} \tag{11}$$

(11)式は、各 Segment の始端で切りはなされ、終端で固定されている m コの片持ちばりの振動方程式である。Incidence Matrix A を用いると、各切断点および節点における釣り合いより、

$$\hat{F} = A^t \hat{f} \tag{12}$$

ここで $\hat{F}$ は applied load vector。また、$\hat{u}$ を変位ベクトルとすると、連続条件より

$$\hat{x} = A\,\hat{u} \tag{13}$$

$$\ddot{\hat{x}} = A\,\ddot{\hat{u}} \tag{14}$$

(11)式に左から A^t をかけて、(12)式の釣り合い条件式を用い、さらに、(13), (14)式の連続条件式を適用すると、系全体の振動方程式を得ることができる。

$$A^t \hat{\mathbb{M}} A\,\ddot{\hat{u}} + A^t \hat{\mathbb{K}} A\,\hat{u} = \hat{F} \tag{15}$$

これを次のようにまとめることができる。

$$\mathbb{M}\,\ddot{u} + \mathbb{K}\,u = \hat{F} \tag{16}$$

ここで $\mathbb{M} = A^t \hat{\mathbb{M}} A$, $\mathbb{K} = A^t \hat{\mathbb{K}} A$ (17, 18)

(16)式で $\hat{F} = 0$ とおくと自由振動となり、$\hat{u} = X \sin \omega t$ とすると、

$$\mathbb{K} X = \omega^2 \mathbb{M} X \tag{19}$$

の eigenvalue eq. となる。よって、det = 0 より、

$$\left| \mathbb{K}^{-1} \mathbb{M} - \frac{1}{\omega^2} \mathbb{I} \right| = 0 \tag{20}$$

(20)式の $\mathbb{K}^{-1} = (A^t \hat{\mathbb{K}} A)^{-1}$ を計算するとき、Branch Node Incidence Matrix A の利点を利用して、Housholder の公式[2] により、逆行列をもとめることができる。上式中、$\hat{\mathbb{K}}$; stiffness matrix は片持ちばりの剛性行列、また $\hat{\mathbb{M}}$; mass matrix は、1). consistent mass matrix、2). lumped mass matrix が考えられるが、前者 1) においては、片持ちばりの mass $\hat{m}_i$ の element m_{ij} は、次式で計算される。

$$m_{ij} = \int_V m(\xi, \eta, \zeta)\,\gamma_i(\xi\eta\zeta)\,\gamma_j(\xi\eta\zeta)\,dV \tag{21}$$

[1]

ここで m; mass の分布、γ_i; $g_i = 1$ をあたえたときの片持ちばりのたわみ形状。一方後者 2) においては、質量は集中され、各分割点、節点間における Incidence が存在しない。すなわち各 lumped mass は datum node にしか連結されていないと考えられ、$A^t \hat{\mathbb{M}} A = [\diagdown \hat{m}_{ii} \diagdown]$ と diagonal にならぶだけである。

3. あとがき

骨組構造物のもつ位相幾何学的性質に注目して、基礎振動方程式を導びいた。この方法を用いると、mass, stiffness は各 segment 単位で考えられ、系全体については、(17), (18)式を用いればよい。damping が入る場合は、(16)式に $A^t \mathbb{C} A\,\dot{u}$ の項を左辺に付け加えればよいだけである。

参考文献；1) R. W. Clough, "Analysis of Structural Vibrations and Dynamic Response," Japan-US Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Aug. 1969, Tokyo, Japan　2). I. Konishi, N. Shiraishi, S. Tamamura & T. Taniguchi, "A Network-Topological Study on Statical Analysis of Rigid Framed Structures," 京大工学部紀要, 1969