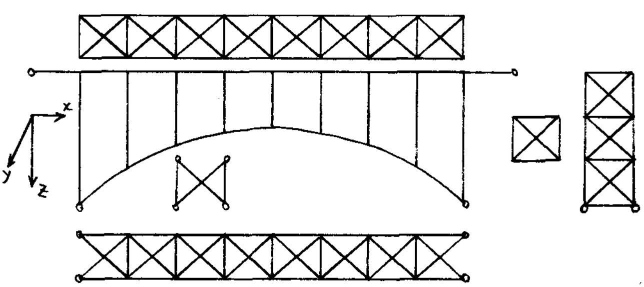
I-122 リブアーチの立体解析

○ 信州大学 正 夏目正太郎
日本構造橋梁研究所 正 田康保二
信州大学 正 谷本勉之助

3次元空間にある構造物は，外力を受ければ立体的挙動をするものであるから，ありのまゝの姿を知るためには，構造物の立体解析が行われなければならない。構造物がいくつかの平面構造に分けられ，その面内にて安定した条件のもとで解かれたものを組み合わせているため，外力を分担する系を予め設定している。かくすると，立体的構造物では，内力の伝達が行われているにもかかわらず，その影響を全く無視した条件で解かれたことになりかねない。立体構造は3次元空間の解析が行われるべきであり，それがよりよく構造物の挙動を把握することになろう。各部材間のからみあいがあって，内力の分散が見られる筈であり，平面解析では見られない力の分担が行われているであろう。

立体解析といっても平面解析で経験した所の演算子によるところの漸化変形法の拡張であって，各節点における未知変形量にての節点の力釣り合いを表わせば，おのずから剛性マトリクスが書かれるので，これを漸化式にするために単位構ごとに集めると，三軸マトリクスの形式となる。

計算例題で取り扱うのは上路式のリブアーチ橋で，上部の補剛桁と下部のリブアーチとの間を鉛直支柱で結び，その結合ではモーメントやねじりは伝達されないとしている。上部補剛桁は連続でありアーチリブと共に y，z 軸方向の曲げを，支柱も y，x 方向の曲げを分担し残り方向の軸力とねじれを分担する。y 方向の2平面をつなぐ部材は斜材と共に軸力のみを考える。



アーチリブは曲線であるが一応支柱間を直線で結ぶ折線で近似させている。しかし必要であれば支柱間を更に曲線によりよく近づける折線でつなげれば，各折点が節点となり，より実際形状に忠実となる。従来ははん雑な式であったアーチの解析も，計算機の出現により，繰り返し演算が容易に行われる所から，単位構内の部分処理を行って全体の漸化式へ取りつけることは，計算上の技巧でもある。アーチリブのような曲線材は短弦の連続体として適当な数の折れ線で有効数字に実用上さしつかえない値をうる。しかして全体の系が単なる直線材から構成されているわけであり，直線材の3次元挙動の組合せで解析計算は終始する。すなわち，

$$\mathbb{U}(\rho)=\begin{bmatrix}u\\w_y\\w_z\\\phi\\\theta_y\\\theta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&\frac{d}{dx}&0\\0&0&0&\frac{d}{dx}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\\phi\\w_y\\w_z\end{bmatrix},\quad \mathbb{V}(\rho)=\begin{bmatrix}F\\S_y\\S_z\\T\\M_y\\M_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}EA\frac{d}{dx}&0&0&0\\0&0&-EI_z\frac{d^3}{dx^3}&0\\0&0&0&-EI_y\frac{d^3}{dx^3}\\0&GJ\frac{d}{dx}&0&0\\0&0&-EI_y\frac{d^2}{dx^2}&0\\0&0&0&-EI_z\frac{d^2}{dx^2}\end{bmatrix},$$

$$u=\lfloor 1\ \ \rho\rfloor N_1$$
$$\phi=\lfloor 1\ \ \rho\rfloor N_2$$
$$w_y=\lfloor 1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\rfloor N_3$$
$$w_z=\lfloor 1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\rfloor N_4$$

これらより一直線材の内力を，両部材端の一般変位で表わすと，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{V}(0)\\ \mathbb{V}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha, \beta\\ \alpha', \beta'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}(0)\\ \mathbb{U}(1)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\mathbb{V}^t(0)\\ \mathbb{V}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha, \beta\\ \alpha', \beta'\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}\mathbb{U}(0)\\ \mathbb{U}(1)\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\mathbb{V}(0)\\ \mathbb{V}^{\tau}(1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha, \beta\\ \alpha', \beta'\end{bmatrix}^{\tau}\begin{bmatrix}\mathbb{U}(0)\\ \mathbb{U}(1)\end{bmatrix}$$

となる。添字 t は $P=0$ 端で $M=0, T=0$，τ は $P=1$ 端で $M=0, T=0$ のときのものである。
軸力のみの部材はその方向余弦と両端の変位差により，フック法則から軸力がきまる。

$$F=\frac{EA}{L}\lfloor \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rfloor(\mathbb{U}'-\mathbb{U})$$

これらを用いて各節点での全体座標の方向の力釣合い式を書くと，一般に γ 番目では，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{\tau} & & \\ & \cdots & \\ & & \mathbb{A}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{\tau}\ C & & \\ a_p\ b_p\ c_p & & \\ \cdots & & \\ & a, \mathbb{B}_a & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{\tau} & & \\ & \cdots & \\ & & \mathbb{C}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{\gamma-1}\\ \mathbb{U}_{\gamma}\\ \mathbb{U}_{\gamma-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{\tau}\\ \mathbb{P}_p\\ \mathbb{P}_a\end{bmatrix}_{\gamma}=0,\qquad \lfloor \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\rfloor_{\gamma}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{\gamma-1}\\ \mathbb{U}_{\gamma}\\ \mathbb{U}_{\gamma+1}\end{bmatrix}+\mathbb{P}_{\gamma}=0$$

添字 τ は連続桁，添字 a はリブアーチ，添字 P は支柱における節点でのスティフネスマトリクスである。
支柱に節点がなければ

$$\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{\tau} & \\ & \mathbb{A}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{\tau} & C\\ a & \mathbb{B}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{\tau} & \\ & \mathbb{C}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{\gamma-1}\\ \mathbb{U}_{\gamma}\\ \mathbb{U}_{\gamma+1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{\tau}\\ \mathbb{P}_a\end{bmatrix}_{\gamma}=0,\quad \lfloor \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}\rfloor_{\gamma}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{\gamma-1}\\ \mathbb{U}_{\gamma}\\ \mathbb{U}_{\gamma+1}\end{bmatrix}+\mathbb{P}_{\gamma}=0$$

となり，最初の支点では

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{\tau} & \\ & \mathbb{B}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{C}_{\tau} & \\ & \mathbb{C}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{\tau}\\ \mathbb{P}_a\end{bmatrix}_1=0,\quad \lfloor \mathbb{B}, \mathbb{C}\rfloor_1\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\end{bmatrix}+\mathbb{P}_1=0$$

最後の支点では，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{A}_{\tau} & \\ & \mathbb{A}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{\tau} & \\ & \mathbb{B}_a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{n-1}\\ \mathbb{U}_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_{\tau}\\ \mathbb{P}_a\end{bmatrix}_n=0,\quad \lfloor \mathbb{A}, \mathbb{B}\rfloor_n\begin{bmatrix}\mathbb{U}_{n-1}\\ \mathbb{U}_n\end{bmatrix}+\mathbb{P}_n=0$$

となる。かように，支柱における節点の数によって単位構内の節点数が変化するので，マトリクスのサイズも変化がある。$\mathbb{P}$ は外力荷重が各節点に作用するものとし，各節点での3方向の荷重である。ただし，移動荷重に対しては影響線的考えを入れるので，ここへは単位荷重を作用させることにしてあり，部材力その他を求めるときに最悪条件になる載荷状態を取ることにしてある。全体を集成すると，

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & & \\ & \cdots & & & \\ & & \mathbb{A}_{n-1} & \mathbb{B}_{n-1} & \mathbb{C}_{n-1}\\ & & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{U}_2\\ \cdots\\ \mathbb{U}_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbb{P}_1\\ \mathbb{P}_2\\ \cdots\\ \mathbb{P}_n\end{bmatrix}=0$$

三軸形式となる。かくして求める結果は，①両主桁間の力の配分，立体からみと，②両主桁をつなぐ部材の部材力の問題がある。特に後者は平面計算では横荷重によって検算されていたものが，立体解析では立体からみによって部材力を分担する役割をもっていることになるだろう。アーチは横荷重に対して曲り梁として挙動するので横荷重に対する検当は一層面目を一新すると思われる。

この計算にあたり日本構造橋梁K.K.の河原勇氏には，プログラムのチェック，データーの作成に絶大なる御協力を得たことを感謝す。