

I-119 任意形状部材の平衡および剛性マトリックスの誘導

熊本大学工学部 正 員 三 池 亮 次
同 上 学生員 ○ 村 上 司

1. 要 旨 任意の形状、断面を有する部材に中間荷重および温度荷重が作用する場合について、部材平衡マトリックスを用い、剛性マトリックスおよび固定端断面力の一般式の誘導を試みたものである。

2. 部材平衡マトリックス

任意形状部材(i, j)の*i*端および*j*端における右手系部材座標軸(ξ, η, ζ)の方向が一致しないとき、すなわち、右手系基準座標軸(x, y, z)に対する*i*端における部材座標軸(ξ, η, ζ)_{*i*}の変換マトリックス T_{iij} と、*j*端における変換マトリックス T_{jjj} が等しくないとき、*i*端における部材断面力の部材および基準座標軸に対する値を $\bar{P}_{ij}, P_{ij}$ 、*j*端における部材断面力を $\bar{P}_{ji}, P_{ji}$ とし、端*i*を開放したときの(i, j)部材の中間荷重による*j*端の断面力の、部材および基準座標軸に対する値(荷重常数と称することにする)を $\bar{P}_{Lij}, P_{Lij}$ 、端*j*を開放したときの*i*点における荷重常数を $\bar{P}_{Lji}, P_{Lji}$ とすれば、(i, j)部材の平衡方程式は、

$$H_{ij} P_{ji} + P_{ij} - P_{Lij} = 0 \quad (1)$$

$$P_{ji} + H_{ji} P_{ij} - P_{Lji} = 0 \quad (1')$$

が成立する。ここに、 H_{ij} は(i, j)部材の平衡マトリックスで、図-1において、*j*端の*i*端に対する相対座標(L_x, L_y, L_z)によって構成される次のマトリックス(アームマトリックスと仮称する)

$$L_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & L_z & -L_y \\ -L_z & 0 & L_x \\ L_y & -L_x & 0 \end{bmatrix} = L(L_{ij})$$

を定義するとき、

$$H_{ij} = H(L_{ij}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix}_{ij}$$

である。なお、

$$H_{ji} = H_{ij}^T = H(-L_{ij}) = H(L_{ji}), \quad P_{Lji} = H_{ji} P_{Lij}$$

の関係がある。部材断面力の部材軸に対する値 $\bar{P}_{ij}$ 、 $\bar{P}_{ji}$ などの正の方向を、正の断面における正の

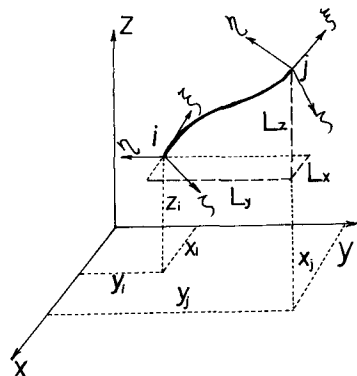


図-1. 任意形状部材の基準および部材座標軸

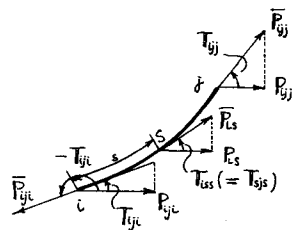


図-2. 断面力ベクトルの基準部材座標軸に対する関係

部材軸方向、または負の断面における負の部材軸方向とすれば、図-2より考察されるように

$$P_{ij} = T_{ij} \bar{P}_{ij}, \quad P_{ji} = -T_{ji} \bar{P}_{ji} \quad (2)$$

$$P_{Lij} = T_{Lij} \bar{P}_{Lij} \quad (2')$$

ここに、変換マトリックスは、 t_{ix} を ξ 軸の x 軸に対する方向余弦とすると、

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{ij}^0 & 0 \\ 0 & T_{ij}^0 \end{bmatrix} \quad T_{ij}^0 = \begin{bmatrix} t_{ix} & t_{iy} & t_{iz} \\ t_{jx} & t_{jy} & t_{jz} \end{bmatrix} = [t_x, t_y, t_z]_{ji}$$

であり、(2), (2)' 式を (1) 式に代入すれば、

$$T_{ij} \bar{P}_{ij} = H_{ij} T_{ij} \bar{P}_{ji} + T_{Lij} \bar{P}_{Lij}$$

したがって、部材断面力に関する次の平衡方程式を誘導することができる。

$$\bar{P}_{ij} = (T_{ij}^{(0)} H_{ij} T_{ij}) \bar{P}_{ji} + \bar{P}_{Lij} = \bar{H}_{ij} \bar{P}_{ji} + \bar{P}_{Lij} \quad (3)$$

ここに

$$\bar{H}_{ij} = T_{ij}^{(0)} H_{ij} T_{ij} \quad (4)$$

である。あるいは、

$$\bar{H}_{ij} = \begin{bmatrix} T_{ij}^0 & 0 \\ 0 & T_{ij}^0 \end{bmatrix}^{(t)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_{ij} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{ij}^0 & 0 \\ 0 & T_{ij}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ij}^{(0)} T_{ij}^0 & 0 \\ T_{ij}^{(0)} L_{ij} T_{ij}^0 & T_{ij}^{(0)} T_{ij}^0 \end{bmatrix}$$

図-2において、 i 端より部材に沿う長さ s の点の分布荷重の基準および部材座標系に対する値を、 P_s 、 $\bar{P}_s$ とするとき、(1)式における荷重常数 P_{Lij} は、次式

$$\int_i^j H_{sj} P_s ds + P_{Lij} = 0 \quad (5)$$

より求めることができる。また、

$$P_s = T_{sjs} \bar{P}_s \quad (6)$$

であるから、(2)式および(6)式を(5)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \int_i^j H_{sj} T_{sjs} \bar{P}_s ds &= -T_{ij} \bar{P}_{Lij} \\ \therefore \bar{P}_{Lij} &= -\int_i^j (T_{ij}^{(0)} H_{sj} T_{sjs}) \bar{P}_s ds = -\int_i^j \bar{H}_{sj} \bar{P}_s ds \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、

$$\bar{H}_{sj} = T_{sj}^{(0)} H_{sj} T_{sjs} \quad (\because T_{ij} = T_{sji}) \quad (8)$$

(7)式または、(2)' および(5)式より、荷重常数 $\bar{P}_{Lij}$ を求めることができる。

3. 剛性マトリックスと固定端断面力

図-1に示す (ij) 部材に中間荷重および温度荷重が作用するものとし、仮想部材には、部材端にお

ける断面力および変位 ($\bar{P}_{ij}^*, \bar{d}_{ij}^*$). ($\bar{P}_{ij}^*, \bar{d}_{ij}^*$)のみが生ずるものとして、これに仮想仕事の原理を適用すれば、 $\bar{P}_{ij}^*$ と $\bar{d}_{ij}^*$ の正の方向が反対であり、部材端断面力のなす仮想仕事は、部材内部の断面力 P_s^* が、変形に対してなす仮想仕事に等しく、次式

$$\bar{P}_{ij}^{*(t)} \cdot \bar{d}_{ij} - \bar{P}_{ij}^{*(t)} \bar{d}_{ij} = \int_i^j P_s^{*(t)} e_s ds \quad (9)$$

が成立する。ここに、 e_s は、 i 端より部材軸に沿う長さが s である点における、ひずみのベクトルで、ひずみのたわみ性マトリックスおよび温度ひずみのベクトルを

$$e_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & \frac{K_2}{GA} & \frac{K_3}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K_4}{GA} & \frac{1}{EI_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \alpha t \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \eta \\ \alpha \delta \end{bmatrix} \quad (10)$$

とすれば

$$e_s = F_{es} \bar{P}_s + C_t$$

である。ここに、 $E, G, I_1, I_2, K_2, K_3, K_4$ は、ヤング率、せん断弾性係数、各軸のまわりの断面2次モーメント、比例常数、 $C, \alpha t, \alpha \eta, \alpha \delta$ は、温度膨脹係数、部材平均温度上昇、各軸のまわりの温度こう配である。

仮想部材には、中間荷重および温度荷重が作用しない場合、(3) 式より、

$$\bar{P}_{ij} = \bar{H}_{ij} \bar{P}_{ji} + \bar{P}_{Lij} \quad \bar{P}_s = \bar{H}_{is} \bar{P}_{ji} + \bar{P}_{Liss} \quad (11-1)$$

$$\bar{P}_{ij}^* = \bar{H}_{ij} \bar{P}_{ji}^* \quad \bar{P}_s^* = \bar{H}_{is} \bar{P}_{ji}^* \quad (11-2)$$

(10), (11) 式を (9) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \bar{P}_{ij}^{*(t)} \cdot \bar{d}_{ij} &= - \int_i^j P_s^{*(t)} e_s ds + \bar{P}_{ij}^{*(t)} \bar{d}_{ij} \\ &= - \int_i^j (\bar{H}_{is} \bar{P}_{ji}^*)^{(t)} \{ F_{es} (\bar{H}_{is} \bar{P}_{ji} + \bar{P}_{Liss}) + C_t \} ds + (\bar{H}_{ij} \bar{P}_{ji}^*)^{(t)} \bar{d}_{ij} \\ &= \bar{P}_{ji}^{*(t)} \left[\left\{ - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{H}_{is} ds \right\} \bar{P}_{ji} + \left\{ - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{P}_{Liss} ds - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} C_t ds \right\} + \bar{H}_{ij}^{(t)} \bar{d}_{ij} \right] \\ \therefore \bar{d}_{ji} &= \left\{ - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{H}_{is} ds \right\} \bar{P}_{ji} + \left\{ - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{P}_{Liss} ds - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} C_t ds \right\} + \bar{H}_{ij}^{(t)} \bar{d}_{ij} \quad (12) \end{aligned}$$

上式における、

$$\bar{F} \equiv - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{H}_{is} ds \quad (13)$$

は、(j) 部材のたわみ性マトリックスであり、直列部材の合成たわみ性マトリックスに関する和の公式を意味する。また、

$$\bar{d}_{Lij} \equiv - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} F_{es} \bar{P}_{Liss} ds - \int_i^j \bar{H}_{is}^{(t)} C_t ds \quad (14)$$

は、 j 端を固定し、 i 端を開放したときの中間荷重および温度荷重に基づく i 端の変位であり、荷重

定数と定義しよう。(14)式の $\bar{P}_{Liss}$ は、(2)または(7)式に従い求めることができる。(12)式の両辺に $F^{-1}=\bar{K}$ を左から乗ずることによって、次式

$$\bar{P}_{ij} = \bar{K} \bar{d}_{ij} - (\bar{K} \bar{H}_{ij}^{(t)}) \bar{d}_{jj} - \bar{K} \bar{d}_{Lij}$$

1 したがって

$$\bar{K}_{jji} = \bar{K}, \quad \bar{K}_{jjj} = -\bar{K} \bar{H}_{ij}^{(t)}, \quad \bar{C}_{jji} = -\bar{K} \bar{d}_{Lij}, \quad \bar{K}_{jij} = -\bar{K}_{jji} \bar{H}_{ij}^{(t)}, \quad \bar{K}_{jii} = \bar{K}_{jjj}^{(t)}, \quad \bar{C}_{jij} = \bar{H}_{ij} \bar{C}_{jji} + \bar{P}_{Lij}$$

とすれば

$$\bar{P}_{ji} = \bar{K}_{ji} \bar{d}_{ji} + \bar{K}_{jj} \bar{d}_{jj} + \bar{C}_{jji} \quad (15-1)$$

$$\bar{P}_{ij} = \bar{K}_{ji} \bar{d}_{ji} + \bar{K}_{jj} \bar{d}_{jj} + \bar{C}_{jij} \quad (15-2)$$

であり、基本座標系に対して、i点における集中荷重を P_i^0 、iおよびj点における変位を d_i, d_j とすれば、変形法の基礎式

$$\left(\sum_j K_{iji} \right) d_i + \sum_j (K_{ijj} d_j) = -(P_i^0 + C_i) \quad (16)$$

ここには

$$K_{iji} = T_{ji} K_{ij} T_{ij}^{(t)}, \quad K_{ijj} = T_{ji} \bar{K}_{ij} T_{ij}^{(t)}, \quad C_i = \sum_j C_{jji}, \quad C_{jji} = T_{ji} \bar{C}_{jji}$$

を得ることができる。

【例題】直線部材の剛性マトリックスおよび固定端断面力を求める。

2次元直線部材において、部材座標軸を基準座標軸に合わせるとき、

$T_{ij} = T_{ji} = I$ で、 $H_{ij} = \bar{H}_{ij}$ であるから、せん断力による変形を無視すれば、

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -L & 1 \end{bmatrix}$$

(図-3 参照)

$$\therefore F = - \int_0^L \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -s & 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} -\frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{L}{EA} & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \bar{K}_{ji} = \bar{K} = F^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{jj} = -\bar{K}_{jii}^{(t)} = -\bar{K} \bar{H}_{ij}^{(t)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\bar{K}_{jij} = -\bar{K}_{jji} \bar{H}_{ij}^{(t)} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

直線ばりに、等分布荷重 p が y 軸方向に荷重されると、せん断変形

$$\bar{H}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -(L-s) & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{P}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad \bar{P}_{Lij} = - \int_0^L \bar{H}_{is} \bar{P}_s ds = \begin{bmatrix} 0 \\ -pL \\ \frac{1}{2} pL^2 \end{bmatrix} \quad \therefore \bar{P}_{Liss} = \begin{bmatrix} 0 \\ -pL \\ \frac{1}{2} pL^2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{d}_{Lij} = - \int_0^L \bar{H}_{is}^{(t)} \bar{P}_{Liss} ds = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{pL^2}{8EI} \\ -\frac{pL^3}{6EI} \end{bmatrix} \quad \bar{C}_{jii} = -\bar{K} \bar{d}_{Lij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} pL \\ \frac{1}{12} pL^2 \end{bmatrix} \quad \bar{C}_{jij} = \bar{H}_{ij} \bar{C}_{jii} + \bar{P}_{Lij} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} pL \\ \frac{1}{12} pL^2 \end{bmatrix}$$

参考文献

- 1) 三池亮次: マトリックス骨組構造解析における2,3の問題* コンピューターによるマトリックス構造解析法講習会, 日本鋼構造協会, 昭和46年3月26日
- 2) L.R.Wang: "Parametric Method of Some Structural Members" Jour. S.D. Proc. A.S.C.E. ST8 Aug. 1970
- 3) 大地羊三: "構造解析とコンピュータ" 産業図書株式会社 昭和46年5月15日
- 4) リフスレイ, 山田徳弘: "マトリックス構造解析入門" 昭和43年9月20日

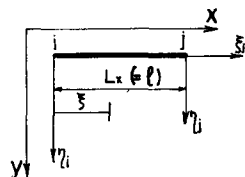


図-3. 直線部材の平衡マトリックス。