

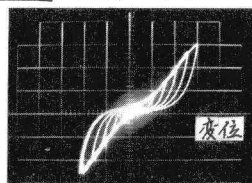
I-99 履歴復元力を有する構造物基礎の振動特性について

京都大学工学部 正員 後藤尚男
 京都大学工学部 正員 吉原 進
 京都大学大学院 学生員 O 北浦 勝

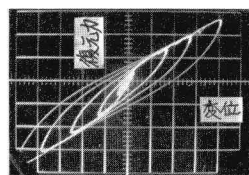
1. はしがき 構造物基礎の耐震性を究明するためには、基礎と地盤とで構成される系の復元力特性を明らかにすることが重要である。著者らがすでに行なった模型実験によると、構造物基礎に働く地盤の水平復元力は基礎の変位が微小であっても履歴を有する非線形となることが確かめられている¹⁾。本研究は、実験より得られた結果をもとにして復元力特性の模式表示を試み、そのような特性を有する1自由度系の応答について検討を加えたものである。

2. 構造物と地盤とで構成される系の復元力特性 実験は構造物基礎模型を砂地盤および粘土地盤に

根入れさせて、振動台上に設置し振動させた。復元力曲線の一例を写真-1に示す。この写真において履歴曲線の最大点を連ねた曲線(以後、最大点曲線と呼ぶ)は、砂地盤の場合軟化ばね型の傾向を持つことが多く、粘土地盤



(a) 砂地盤



(b) 粘土地盤

写真-1 模型実験による復元力曲線

の場合には bi-linear 型の傾向が現われている。また履歴曲線の形状は外力レベルに無関係にほぼ相似形となしており、砂地盤においてはまさつの効いたスリツプ型の傾向を持ち、かつ幾分硬化ばね型の場合もある。粘土地盤においてはスリツプのないまさつ型の履歴を描いている。そこで復元力曲線 $R(x/x_0)$ を次式のように最大点曲線 $f(x/x_0)$ と履歴曲線 $g(x/x)$ との積で表わすという手法をとる²⁾。

$$R(x/x_0) = f(x/x_0) \cdot g(x/x) \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 x : 復元力曲線の変位、 x : 各履歴曲線の最大点の変位、 x_0 : 規準変位(この場合降伏変位をとる)。このように定義することにより、復元力曲線の最大点曲線は軟化ばね型または bi-linear 型の特性を持つ曲線で、しかも履歴曲線はスリツプを持つまさつ型に近い曲線を表わすことができる。最大点曲線および履歴曲線は以下のように模式表示する³⁾。

(i) 最大点曲線 $f(x/x_0)$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{砂地盤の場合: } |x/x_0| \leq 1 \text{ のとき} & x/x_0 = Y/y_0 \\ & x/x_0 > 1 \text{ のとき} & x/x_0 = Y/y_0 + \alpha(Y/y_0 - 1)^r \\ & x/x_0 < -1 \text{ のとき} & x/x_0 = Y/y_0 + \alpha(Y/y_0 + 1)^r \\ \text{粘土地盤の場合: } |x/x_0| \leq 1 \text{ のとき} & x/x_0 = Y/y_0 \\ \text{(bi-linear型)} & x/x_0 > 1 \text{ のとき} & x/x_0 = (Y/y_0 - 1)/(1-n) + 1 \\ & x/x_0 < -1 \text{ のとき} & x/x_0 = (Y/y_0 + 1)/(1-n) - 1 \end{array} \right\} \quad \text{----- (2)}$$

この式を Y/y_0 について解いたものが最大点曲線 $f(x/x_0)$ を与えることになる。ここに、 Y は各履歴曲線の最大点の復元力、 y_0 : 規準復元力(この場合降伏復元力をとる)、 α, r : 最大点曲線の軟化

の程度を表わす定数, α は 0 または正数, γ は正の奇数, n : 弾塑性傾斜率である。

(ii) 履歴曲線 $g(x/x)$

Jennings 型の復元力を参照して次のように表わす。下枝に対しては,

$$\left. \begin{aligned} -(1-\delta) \leq \frac{x}{X} \leq 1 \text{ のとき} \quad & \frac{y+(1-\delta)Y}{(2-\delta)Y} = \frac{1}{1+\beta} \left[\frac{x+(1-\delta)X}{(2-\delta)X} + \beta \left\{ \frac{x+(1-\delta)X}{(2-\delta)X} \right\}^\delta \right] \\ -1 \leq x/X \leq -(1-\delta) \text{ のとき} \quad & y/Y = x/X \end{aligned} \right\} \text{---(3)}$$

上枝に対しては,

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{X} \leq 1-\delta \text{ のとき} \quad & \frac{y-(1-\delta)Y}{(2-\delta)Y} = \frac{1}{1+\beta} \left[\frac{x-(1-\delta)X}{(2-\delta)X} + \beta \left\{ \frac{x-(1-\delta)X}{(2-\delta)X} \right\}^\delta \right] \\ 1-\delta \leq x/X \leq 1 \text{ のとき} \quad & y/Y = x/X \end{aligned} \right\}$$

を得る。これらの式を y/Y について解いたものが履歴曲線 $g(x/x)$ を表わす。ここに, y : 復元力曲線の復元力, δ : Jennings 型の履歴曲線からの変形量を表わす定数で $0 \leq \delta \leq 1$, β , δ : 履歴曲線のくくらのみの程度を表わす定数, β は 0 または正数, δ は正の奇数。式 (3) において $\delta=0$ とおくと粘土の履歴曲線に近くなる。パラメータを変化させたときの $g(x/x)$ および $R(x/x_0)$ を図示

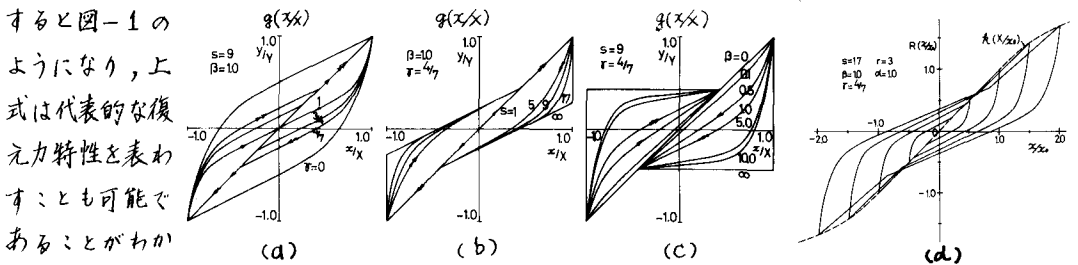


図-1 模式化された砂地盤の履歴曲線および復元力曲線

3. 定数徐変化法による周波数応答曲線 式 (1) で表わされるような復元力特性を持つ 1 自由度系が起振機によつて発生されるような外力 $x_s \eta^2 \cos \eta t$ を受けたときの運動方程式は次式ようになる。

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{x}{x_0} \right) + 2h \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{x_0} \right) + R \left(\frac{x}{x_0} \right) = f \eta^2 \cos \eta t \quad \text{---(4)}$$

ここに, η : 外力の振動数を系の非減衰固有振動数 (1.0 に比る) で除した値, h : 減衰定数, f : 外力の変位振幅 x_s を x_0 で除し規準化したもの。式 (4) に式 (1), (2), (3) を代入して定数徐変化法により周波数応答曲線, すなわち振動数比 η と無次元変位 x/x_0 との関係を求めると次のようになる。

$$\left\{ \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - f^2 \right\} \eta^4 + \left\{ 4h^2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 2h \left(\frac{x}{x_0} \right) \cdot \left(\frac{x}{x_0} \right) \cdot G \right\} \eta^2 - 4h \cdot h \left(\frac{x}{x_0} \right) \cdot \left(\frac{x}{x_0} \right) \cdot H \eta + \left\{ h \left(\frac{x}{x_0} \right) \right\}^2 (H^2 + G^2) = 0 \quad \text{---(5)}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } G &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos \theta) \cdot \cos \theta \cdot d\theta = 1 - \frac{\beta(1-\delta)}{\pi(1+\beta)} \sin \theta_1 + \frac{2\beta}{\pi(1+\beta)(2-\delta)^{\delta-1}} \int_0^{\theta_1} (\cos \theta + 1 - \gamma)^\delta \cdot \cos \theta \cdot d\theta \\ H &\equiv \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\cos \theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{-\beta(2-\delta)^2(\delta-1)}{\pi(1+\beta)(\delta+1)} \end{aligned} \right\} \text{---(6)}$$

であり, $\theta_1 = \cos^{-1}(\delta-1)$ 。図-2 は履歴曲線の形状のみによつて決まる定数 G と H の挙動を示したものである。式 (6) および 図-2 は, $\beta < 2$ の範囲において G , H の変化が大きいことを示している。

また Jennings 型の履歴曲線から与えられるにつれて、すなわち δ が大となるにつれて $|H|$ は小さくなるが、 G はほぼ一定となっている。履歴曲線にふくらみがないとき、すなわち

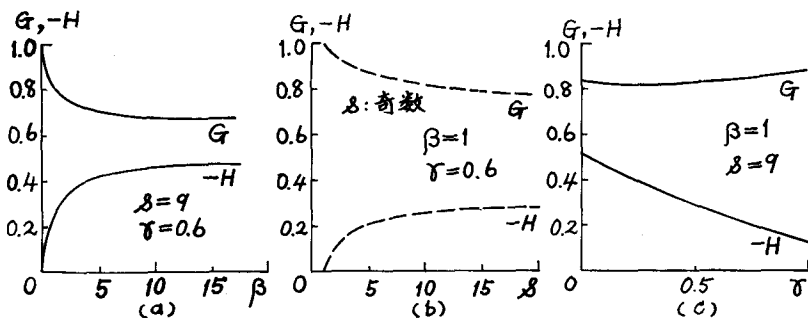


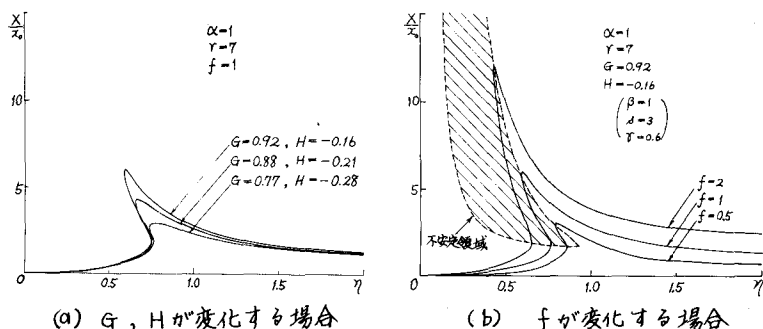
図-2 式(6)により定義される G, H

$\beta=0$ または $\delta=1$ のとき G は最大値1となり、 $|H|$ は最小値0となる。 $|H|$ の最大値は $\delta=0$ で $\beta \rightarrow \infty$ のときに生じ、 $\pi/4$ である。図-3は式(5)によつて与えられる周波数応答曲線と、砂地盤の最大点曲線を用いて計算したものであり、斜線部分は不安定領域を表わす。安定領域と不安定領域との境界は式(5)に $\partial \eta / \partial (X/X_0) = 0$ を用いて次式で与えられる。

$$\left(\frac{X}{X_0}\right) \eta^4 + \left\{ 4R^2 \left(\frac{X}{X_0}\right) - R \left(\frac{X}{X_0}\right) \cdot G - \frac{\partial R \left(\frac{X}{X_0}\right)}{\partial \left(\frac{X}{X_0}\right)} \left(\frac{X}{X_0}\right) \cdot G \right\} \eta^2 - 2R \left\{ \frac{\partial R \left(\frac{X}{X_0}\right)}{\partial \left(\frac{X}{X_0}\right)} + \frac{R \left(\frac{X}{X_0}\right)}{\left(\frac{X}{X_0}\right)} \right\} \left(\frac{X}{X_0}\right) \cdot H \eta + R \left(\frac{X}{X_0}\right) \cdot \frac{\partial R \left(\frac{X}{X_0}\right)}{\partial \left(\frac{X}{X_0}\right)} (H^2 + G^2) = 0 \quad \text{-----}(7)$$

図-3(a)は $|H|$ が大となるにつれて、すなわち履歴曲線のふくらみが増すにつれて周波数応答曲線の最大点は下がり、共振振動数は大きくなって1に近づくことを表わしている。粘性減衰定数 η が大きくなるときに

も、応答曲線は同様の傾向を表わすが、これは後述するように $|H|$ は、履歴減衰と等価な粘性減衰に置き換えたときの値、等価粘性減衰定数によつて表現できると呼応してい



(a) G, H が変化する場合

(b) f が変化する場合

図-3 周波数応答曲線(砂地盤の場合)

る。図-3(b)は外力レベルが大きくなるにつれて応答が不安定となる場合があることを示している。また同図において応答曲線の最大点を連ねる曲線は外力レベルが大きくなるにつれて振動数が低い方へ移動し、軟化ばね型の特性を表わしている。このことは次のように説明される。応答曲線の最大点においては傾きが0であるから、最大点と連ねる曲線は式(5)に $\partial (X/X_0) / \partial \eta = 0$ なる条件を代入して f を消去することにより次式で与えられる。なお以下においては復元力そのものから生ずる性質を検討するために粘性減衰定数 η は0とする。

$$\eta^2 = \frac{R \left(\frac{X}{X_0}\right) \cdot (G^2 + H^2)}{\frac{X}{X_0} \cdot G} \quad \text{-----}(8)$$

上式より履歴曲線の形状が定まると G, H は定数となるから、応答曲線の最大点を連ねる曲線は復元力の最大点曲線 $R(X/X_0)$ に強く影響されることがわかる。周波数応答曲線の変位の最大点と外力レベルの関係は、式(5)に $\partial (X/X_0) / \partial \eta = 0$ なる条件を代入して η を消去すると、

$$\frac{X}{x_0} = \frac{\sqrt{G^2 + H^2}}{-H} \cdot f \quad \text{-----}(9)$$

として得られる。式(9)は、式(1)で定義されるような復元力特性を有する系に、起振機のような振動数の2乗に比例する外力が作用したときの周波数応答曲線においては、変位の最大点はたとえ復元力が非線形であっても外力レベル f に正比例し、しかも比例定数は履歴曲線の形状のみによって定まることを示している。図-3(b)においても最大変位と外力レベルは比例することが確認される。図-4は粘土地盤中に構造物基礎を根入れさせた場合の実験より得られた周波数応答曲線である。実験は式(5)より得られる理論解である。両者の応答の傾向はほぼ一致しているとみなせるから復元力を式(1)、(2)、(3)のように表示することは妥当であると考えられる。

4. エネルギー法による解と等価粘性減衰定数 定常応答においては、各サイクルにおいて振動系が履歴を描くことにより消費するエネルギーと外力によって与えられるエネルギーとは等しくなる。この関係を用いて、最大変位と外力レベルの関係として表わすと次式を得る。

$$\frac{X}{x_0} = \frac{G^2 + H^2}{-GH} \cdot f \quad (10)$$

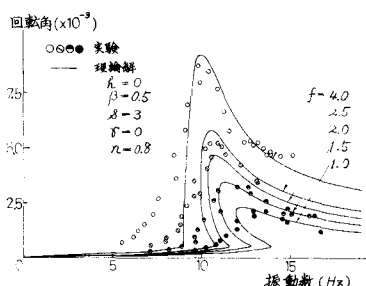


図-4 周波数応答曲線(粘土)

式(9)と(10)の係数の比をとると、 $\frac{1}{\sqrt{1+(H/G)^2}}$ となる。実験においては β は1より小とみなしてよい場合が多く、そのときには $(H/G)^2 \ll 1$ となり係数の比は約1となる。このことは定数徐変化法によって求められた周波数応答曲線の変位の最大点と外力レベルの関係は、エネルギー法により得られた関係と一致することと意味する。次によく行なわれる方法⁴⁾によって履歴減衰と等価粘性減衰定数 η_{eq} に置き換えると、

$$\eta_{eq} = \frac{\beta(\delta-1)(2-\gamma)^2}{4\pi(1+\delta) \left\{ \frac{\beta(2-\gamma)^2(\delta+3)}{2(1+\delta)} - 2\beta(1-\gamma)(1-A) + (1-A^2) - \frac{2\beta(A+1-\gamma)^{\delta+1}}{(2-\gamma)^{\delta-1}(1+\delta)} \right\}} \quad \text{-----}(11)$$

となる。ただし、 A は履歴曲線 $g(\gamma/x)$ の下枝が γ/x 座標と交わる点の値である。上式より η_{eq} は最大点曲線とは無関係に履歴曲線の

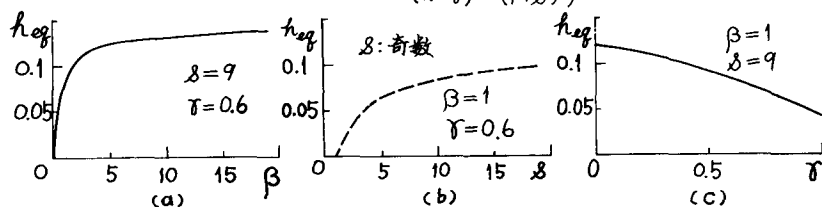


図-5 等価減衰定数

形状のみによって定まることがわかる。上式と図示すると図-5となり、図-2の $-H$ のグラフとほぼ相似形をなしている。 η_{eq} は履歴曲線が小さくみえづれつたとき大となり、Jennings型から変形するにつれて小となるが、特に $\beta < 2$ の範囲において η_{eq} の変化が著しい。 $\gamma = 0$ で β, δ が限りなく大になるとき η_{eq} は最大値 $1/2\pi$ となり、従来の結果と一致する⁵⁾。式(6)と(11)より H は η_{eq} を用いて表現できるので、 H は履歴減衰による効果を表わす値であるといえる。

1) 吉原・北浦・太田・宮崎：昭和46年度関西支部講演概要，I-33。2) 土岐・安藤：第22回年次学術講演会講演概要，I-151。3) 後藤・吉原・北浦：論文報告集(投稿中)。4) 田治見：「建築振動学」。5) Jennings, P.C.: Periodic Response of A General Yielding Structure, Proc. ASCE, EM2, April, 1964.