

1. まえがき 基礎構造物が地中にそれほど深く根入れされていなくても、その周囲をとりまく地盤が何らかの理由で深さ方向における物理特性が著しく異なることがある。このような地盤が水平方向に加振されれば、地表面の変動は極めて大きくなるにもかかわらず、構造物の受ける地震力というものには必ずしも大きくはならない場合も生ずる。かかる現象についてはすでに若干の解析が行なわれてきたが、^{1),2)}ここではさらに表層地盤を粘弾性不均質地盤として取扱ひ、剛な円柱基礎構造物の動揺振動特性についても検討した。不均質地盤としては、せん断弾性係数が深さの1乗あるいは2乗に比例して増大する場合を対象にした。

2. 地盤の強制振動 変位の鉛直方向成分を無視するとき、水平振動に対する不均質地盤の、 x 方向における運動方程式は次式のようになる。

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{ここに、} \tau_{rz} = (\mu + \frac{\partial}{\partial t} \mu') \frac{\partial u_g}{\partial z} \quad \text{----- (2)}$$

基礎入力 $u_g = A_0 e^{i\omega t}$ に対する地盤の応答を $u_g = U e^{i\omega t}$ とすると、(1)式より

$$\frac{d}{dz} \left[(\mu + i\omega \mu') \frac{dU}{dz} \right] + \rho \omega^2 U = -\rho A_0 \omega^2 \quad \text{----- (3)}$$

そこで、 μ と μ' とを同じ分布形を持つと仮定し、

$$\mu = \mu_0 \gamma(z), \quad \mu' = \mu'_0 \gamma(z) \quad \text{----- (4)}$$

とすると、(3)式は次式のようになる。

$$(1 + i\omega \mu'_0 / \mu_0) \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \frac{dU}{dz} \right] + \rho \omega^2 U = -\rho \omega^2 A_0 \quad \text{----- (5)}$$

そこで、これを非減衰自由振動の式

$$\rho \frac{\partial^2 u_g}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial u_g}{\partial z} \right], \quad \text{すなわち} \quad \frac{d}{dz} \left[\gamma(z) \frac{d\phi}{dz} \right] + \rho \xi_m^2 \phi = 0 \quad \text{----- (6)}$$

における $\phi(z)$ が、境界条件 $z=H_1: \partial\phi/\partial z=0, \quad z=H_2: \phi(z)=0$ を満たすとき持つ固有関数 $\phi_m(z)$

$$\text{で (5) 式を展開すると} \quad u = A_0 \omega^2 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m(z)}{\xi_m^2} \frac{\beta_{0m}}{\alpha_{0m}} = A_0 (\frac{\omega}{\omega_0})^2 e^{i\omega t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_m(z)}{\xi_m^2} \frac{\beta_{0m}}{\alpha_{0m}} \quad \text{----- (7)}$$

$$\text{ここに、} \alpha_{0m} = \int_{H_1}^{H_2} \phi_m^2(z) dz, \quad \beta_{0m} = \int_{H_1}^{H_2} \phi_m(z) dz, \quad \xi_m = \sqrt{(1 + i\omega \mu'_0 / \mu_0) \xi_m^{*2} - \omega^2}, \quad \xi_m^* = \xi_m / \omega_0, \quad \omega_0: \text{基準振動数} \quad \text{--- (8)}$$

このとき固有関数 $\phi_m(z)$ は分布形状 $\gamma(z)$ の差異により次のように得られる。

(1) $\gamma(z) = z/H_1$ のとき

$$\phi_m(z) = Y_1(2\xi_m \frac{H_1}{A}) J_0(2\xi_m \sqrt{\frac{H_1 z}{A^2}}) - J_1(2\xi_m \frac{H_1}{A}) Y_0(2\xi_m \sqrt{\frac{H_1 z}{A^2}}), \quad (A: \text{基準横波伝播速度}) \quad \text{----- (9)}$$

(2) $\gamma(z) = (z/H_1)^2$ のとき

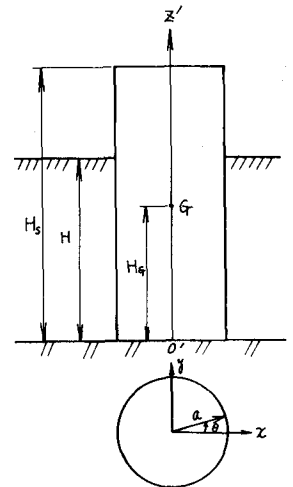


図-1 構造物-地盤系モデル

$$\phi_m(z) = \sqrt{\frac{H_1}{z}} \left[\sin \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4H_1^2 \xi_m^2}{\beta_m^2} - 1} \cdot \ln \left(\frac{z}{H_1} \right) \right\} + \sqrt{\frac{4H_1^2 \xi_m^2}{\beta_m^2} - 1} \cdot \cos \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4H_1^2 \xi_m^2}{\beta_m^2} - 1} \cdot \ln \left(\frac{z}{H_1} \right) \right\} \right] \quad \text{----- (10)}$$

3. 構造物と地盤との相互作用 構造物も同様に基盤より強制力を与えられるので、その結果構造物は振動中に地盤との間にエネルギーのやりとりをする。この地盤に伝えられるエネルギーはいうまでもなく無限遠へ逸散する。この逸散する波動は円形断面の構造物表面から、四方八方に放射されるので、これを円筒座標 (r, θ, z) を用いて運動方程式を書けば以下のようになる。

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \cos \theta \quad \text{--- (11)}$$

$$\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{2 \tau_{\theta r}}{r} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \sin \theta \quad \text{--- (12)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Delta + 2(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) \frac{\partial u}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \lambda \Delta + 2(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}) \\ \tau_{r\theta} &= (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}) \\ \tau_{rz} &= (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{\partial w}{\partial z}) \\ \tau_{\theta z} &= (\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) (\frac{\partial v}{\partial z}) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{および } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

$$\text{よって } \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \text{ したがって } 2\tilde{\omega}_z = \frac{1}{r} \left\{ 2(r\tilde{\omega}_r) - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right\} \quad \text{--- (14)}$$

に關して, (11), (12) 式を書き直すと,

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right] \quad \text{--- (15)}$$

$$\frac{\partial^2 (2\tilde{\omega}_z)}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 (2\tilde{\omega}_z) + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial r}) \frac{\partial (2\tilde{\omega}_z)}{\partial z} \right] \quad \text{--- (16)}$$

ここで, λ も μ, μ' と z 方向に同様な分布形 $\delta(z)$ に従うとして, (15), (16) 式の $\Delta, 2\tilde{\omega}_z$ の時間項を省くと,

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta + (1 + i\omega \frac{\mu_0'}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial \Delta}{\partial z} \right] + \rho \omega^2 \Delta = 0 \quad \text{--- (17)}$$

$$\mu \nabla^2 (2\tilde{\omega}_z) + (1 + i\omega \frac{\mu_0'}{\mu_0}) \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \frac{\partial (2\tilde{\omega}_z)}{\partial z} \right] + \rho \omega^2 (2\tilde{\omega}_z) = 0 \quad \text{--- (18)}$$

よれ中、 r, θ 方向の変位 u, v は z における地盤の固有関数 $\phi_m(z)$ を用いて以下のように求められる。

$$u = \sum_{m,n} \left[A_{mn} \frac{\partial K_m(r)}{\partial r} + m B_{mn} \frac{K_m(r)}{r} \right] \cos n\theta \cdot \phi_m(z) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{--- (19)}$$

$$v = \sum_{m,n} \left[m A_{mn} \frac{K_m(r)}{r} + B_{mn} \frac{\partial K_m(r)}{\partial r} \right] (-\sin n\theta) \cdot \phi_m(z) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{--- (20)}$$

ここに A_{mn}, B_{mn} は積分定数であり, 構造物表面において地盤と離れないという, 変位連続の境界条件より決定することが出来る。さらに $n=1$ であることは容易にわかる。

ところで, 構造物に作用する z 方向の側圧を $p(z)$ とすると, 次のように求められる。

$$p(z) = \oint_{\Gamma_a} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta) d\theta = -\rho \pi a^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(D_m - \frac{\beta_m}{\alpha_m} \frac{a\omega^2}{\xi_m^2} \right) \frac{\alpha_m}{\beta_m} \xi_m^2 \delta(z) \phi_m(z) e^{i\omega t} \quad \text{--- (21)}$$

$$\text{ここに, } D_m = \int_{H_1}^{H_2} \eta(z) \phi_m(z) dz / \int_{H_1}^{H_2} \phi_m^2(z) dz, \quad \beta_m = \int_{H_1}^{H_2} \delta(z) \phi_m^2(z) dz \quad]$$

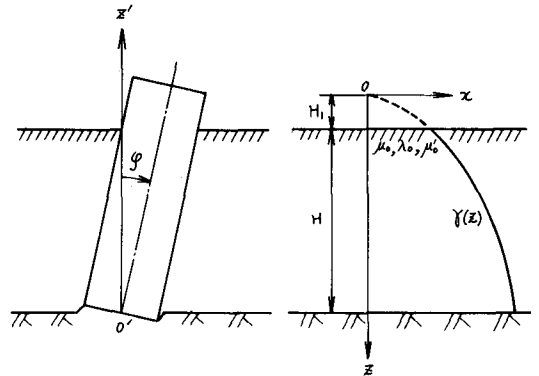


図-2 動揺振動モデルと分布関数

$$\Omega_m = \left[k_u \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} + k_a \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} + 4 \right] / \left[k_u \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} \cdot k_a \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} + k_u \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} + k_a \frac{k_0(k\alpha)}{k_1(k\alpha)} \right] \quad \text{----- (22)}$$

$k_u = \sqrt{4\pi/\beta_m} \cdot \xi_m/\alpha_c$, $k_a = \sqrt{4\pi/\beta_m} \cdot \xi_m/\beta_0$, α_c, β_0 : 基準縦波および横波伝播速度

そこで、この剛な円柱基礎構造物がその底面中心線まわりの動揺振動を行なうときの運動方程式は田中見成³⁾と同様の記法に決うと、次式のようになる。

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + C_s \frac{d \varphi}{dt} + k_R \varphi = -m_0 H_0 \frac{d^2 u_g}{dt^2} + \int_0^H p(z) z' dz' \quad \text{----- (23)}$$

この解を $\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$ とするとき、 φ_0 は次式で与えられる。

$$\varphi_0 = \frac{\frac{H_0}{i\omega} + \frac{1}{H} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \chi (q_1 + i q_2)}{1 + 2i k_s \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \chi (f_1 + i f_2)} \cdot A_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \quad \text{----- (24)}$$

それゆえ、 $z = H_0$ の応答倍率 $| \chi(i\omega; H_0) |$ は次式で与えられる。

$$| \chi(i\omega; H_0) | = \left| \frac{u_g + u(H_0)}{u_g} \right| = \left| 1 + \frac{\frac{H_0 H_0}{i\omega} + \frac{H_0}{H} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \chi (q_1 + i q_2)}{1 + 2i k_s \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 + \chi (f_1 + i f_2)} \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right| \quad \text{----- (25)}$$

このとき、 $f_1 + i f_2$ は $q_1 + i q_2$ はそれぞれ動揺振動における、表層地盤の動的はね効果と振動土圧効果を示すものであって、次式で定義される量である。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_0}{H} \beta_{0m}^* - \beta_{0m}^* \right) \frac{\beta_{2m}^*}{\beta_{1m}^*} \xi_m^2 \Omega_m / \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_m}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{H_0}{H} \beta_{0m}^* - \beta_{0m}^* \right) \frac{\beta_{2m}^*}{\beta_{1m}^*} \Omega_{ms} &= f_1 + i f_2 \\ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_{0m}^* \beta_{2m}^*}{\beta_{1m}^*} \Omega_m / \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\xi_m}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{H_0}{H} \beta_{0m}^* - \beta_{0m}^* \right) \frac{\beta_{2m}^*}{\beta_{1m}^*} \Omega_{ms} &= q_1 + i q_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (26)}$$

ここに、 Ω_{ms} は $\omega = 0$ の場合の Ω_m で、 χ は $\omega = 0$ の場合の側圧と底面圧との比である。このとき構造物の動揺振動固有振動数 ω_0 と χ は次式で与えられるとする。

$$\frac{\omega_0}{\omega_0} = C' \left[\frac{H_0}{H} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \right\} \right]^{1/2}, \quad \chi = C'' \cdot \frac{H_0}{H} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{H_0}{H} \beta_{0m}^* - \beta_{0m}^* \right) \frac{\beta_{2m}^*}{\beta_{1m}^*} \Omega_{ms} \quad \text{----- (27)}$$

4. 計算結果とその考察 β_0/α_c (基準横波速度/基準縦波速度) = 1/3, $k_g = k_s = 0.05$, $H/H_0 = 2/3$, $H_0/H = 1$ の数値計算例を図3~図10に掲げた。図3~図5は $\chi(z)$ が直線分布 ($NP=1$) の場合で、図6~図8は $\chi(z)$ が放物線分布 ($NP=2$) の場合である。図3と図6の動的はね効果 $f_1 + i f_2$ において、実部 f_1 は地盤の第1次共振点で急速に減少し、以後は徐々に減少する。一方虚部 f_2 は第1次共振点を超えると急速に増加、すなわち消散減衰効果がほぼ直線的に急増しているが、この傾向は均質な地盤の場合と類似している。この傾向のため構造物の高次の共振は起こりにくくなることが知られる。図3と図7は振動土圧の効果であるが、これも均質地盤におけると同様に、高次共振はほとんど無視でき、近似的に1自由度系の共振曲線と等置しうる。図5と図8は地表面での構造物共振曲線であるが、この例では C' と小さくしたため割合地盤の影響が小さいが、構造物共振点と地盤の第2次以上の共振点とが接近しても、相乗効果はほとんど認められぬが、図8の $H_0/H = 0.2$ の場合には地盤の第1次共振点と構造物共振点が接近して相乗効果がはつきりと認められる。図9と図10は表層変位と震動圧鉛直分布であるが、表層変位が小さい場合でも構造物下部で大きな震動圧が生じることがあり、表層での変位が相当大きくなっても、表層近くの震動圧はほとんど差支なく小さいことが知られる。

参考文献 1) 田中見成・小坪洋典：構造物に作用する水平地震力について、財地工学シナジウム (1966) 講義集。2) 土岐憲三：不均質地盤中にある構造物の地震応答、第2回日本地震工学会シンポジウム (1970) 講義集。3) 田中見成：深い基礎と層状構造物の地震応答について、財地工学シナジウム (1966) 講義集。

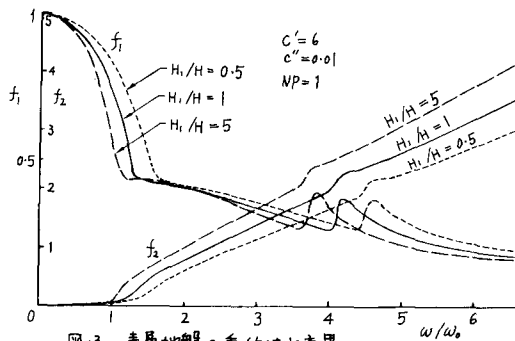


図-3 表層地盤の動的はね効果

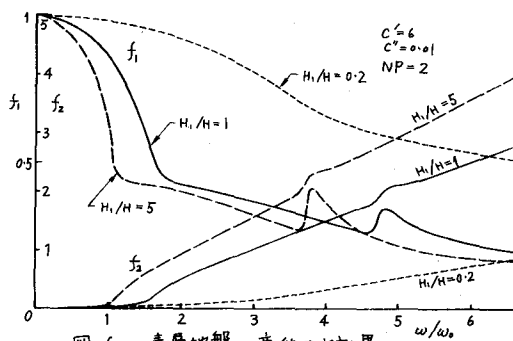


図-6 表層地盤の動的はね効果

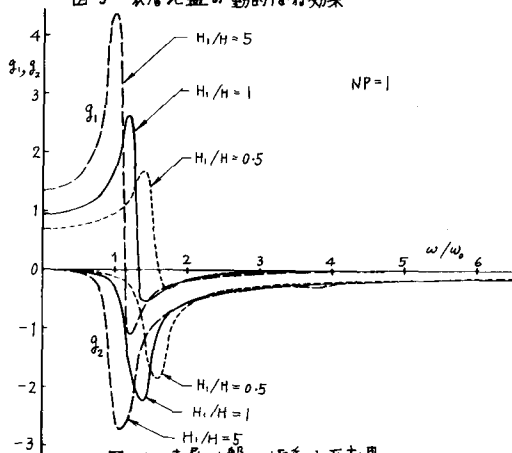


図-4 表層地盤の振動土圧効果

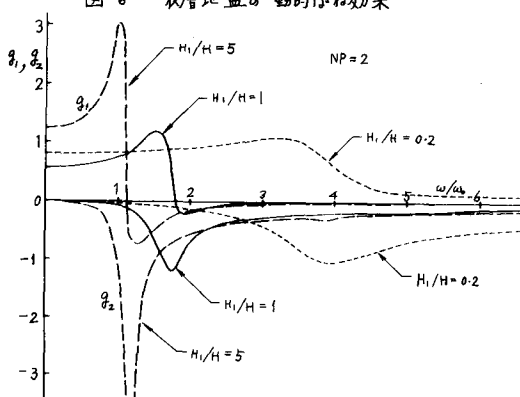


図-7 表層地盤の振動土圧効果

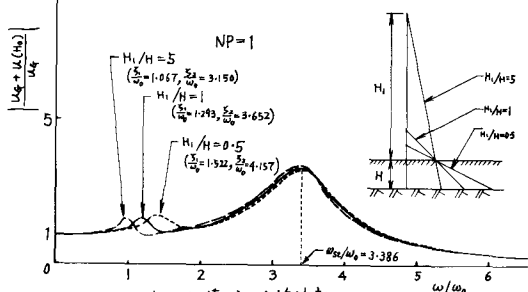


図-5 円柱剛基礎の変位応答倍率

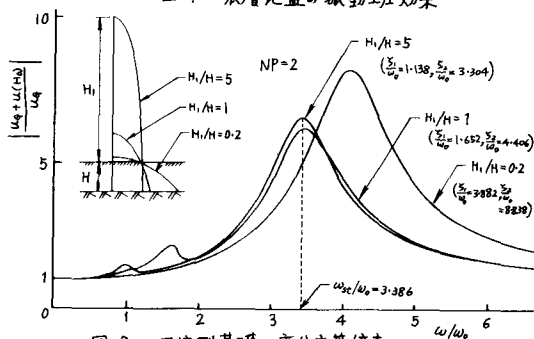


図-8 円柱剛基礎の変位応答倍率

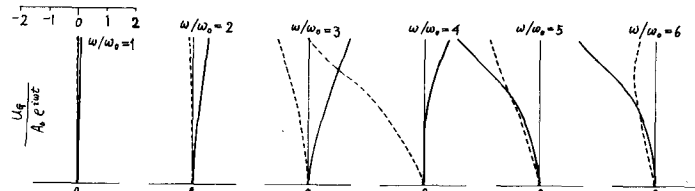


図-9 表層地盤の変位分布

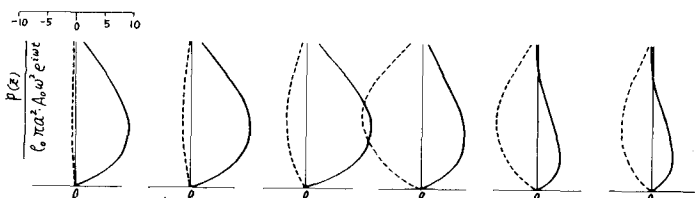


図-10 振動土圧分布