

I-97 マトリックス法による基礎構造の地震応答解析

建設省土木研究所 正員 栗林 栄一
正員 ○飯田 裕

まえがき

マトリックス法の基礎をなすものは仮想仕事の原理であり、構造物に作用する外力とそのとき生ずる変位の関係を表わすために、3つの独立したマトリックスが用いられる。地震応答解析のような構造物の振動問題の解析には変形法が適しているが、変形法においては、上述の3つのマトリックスとして、要素の剛性マトリックス・変位変換マトリックスおよび変位変換マトリックスの転置マトリックスが用いられる。これについては既に報告したが¹⁾、本論文では、基礎構造を構成するさらに一般化した各種要素の剛性マトリックス・変位変換マトリックスを示し、これらの地震応答解析への適用について述べる。要素は一次元、地盤は弾性床と仮定する。

1. 要素の剛性マトリックス

1.1 弾性床上の剛体要素の剛性マトリックス

ケーソン等の力学的な作用は、“弾性床上の剛体要素”であると仮定することができる。剛体の周縁に沿う曲線座標を s 、 s 点における法線方向、接線方向の単位長当りのばね係数をそれぞれ $k_n(s)$ 、 $k_s(s)$ 、剛体に固定された座標系 O - XY の原点 O の変位を r_x 、 r_y 、 r_θ 、原点 O に作用する外力を R_x 、 R_y 、 R_θ 、この要素の剛性マトリックスを $[k_c]$ とすると

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_\theta \end{Bmatrix} = [k_c] \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{x\theta} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{y\theta} \\ k_{\theta x} & k_{\theta y} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_\theta \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで

$$k_{xx} = \int \left\{ k_n(s) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + k_s(s) \left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 \right\} ds,$$

$$k_{yy} = \int \left\{ k_n(s) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + k_s(s) \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right\} ds,$$

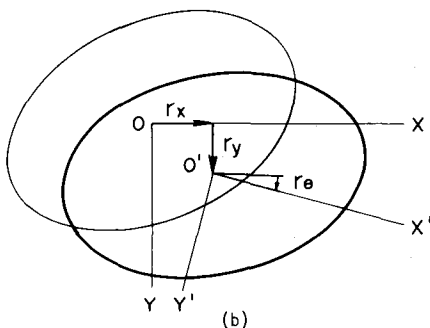
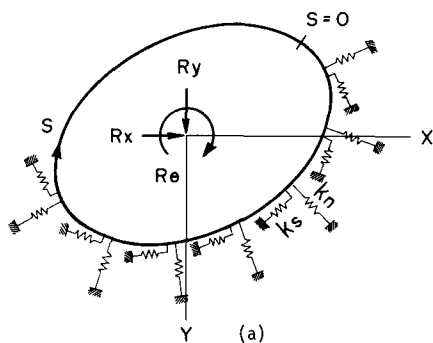


Fig.1

$$\begin{aligned}
 k_{\theta\theta} &= \int \left\{ k_n(s) \left(y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + k_s(s) \left(-y \frac{\partial x}{\partial s} + x \frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 \right\} ds, \\
 k_{xy} &= k_{yx} = \int \left\{ -k_n(s) + k_s(s) \right\} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} ds, \\
 k_{y\theta} &= k_{\theta y} = \int \left\{ k_n(s) \left(y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + k_s(s) \left(-y \frac{\partial x}{\partial s} + x \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} \right\} ds, \\
 k_{x\theta} &= k_{\theta x} = \int \left\{ -k_n(s) \left(y \frac{\partial y}{\partial s} + x \frac{\partial x}{\partial s} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + k_s(s) \left(-y \frac{\partial x}{\partial s} + x \frac{\partial y}{\partial s} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \right\} ds
 \end{aligned} \quad (2)$$

1.2 弾性床上の梁要素の剛性マトリックス

地中に埋め込まれたくいの力学的作用は，“弾性床上の梁要素”であると仮定することができ。軸圧縮力をうけている弾性床上の梁要素の応力を図-2に示すように S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 、ひずみを v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 、この要素の剛性マトリックスを $[k_p]$ とすると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = [k_p] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & 0 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

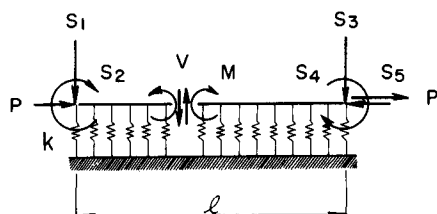


Fig.2

ここで

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= k_{33} = EI \frac{\alpha \gamma (\alpha^2 + \gamma^2) (\gamma^2 \sinh 2\alpha l + \alpha \sin 2\gamma l)}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{22} &= k_{44} = EI \frac{\alpha \gamma (\gamma^2 \sinh 2\alpha l - \alpha \sin 2\gamma l)}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{12} &= k_{21} = -k_{34} = -k_{43} = EI \frac{(\alpha^2 + \gamma^2) (\gamma^2 \sinh^2 \alpha l + \alpha^2 \sin^2 \gamma l)}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{13} &= k_{31} = -EI \frac{2\alpha \gamma (\alpha^2 + \gamma^2) (\alpha \cosh \alpha l \sin \gamma l + \gamma \sinh \alpha l \cos \gamma l)}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{44} &= k_{41} = -k_{23} = -k_{32} = EI \frac{2\alpha \gamma (\alpha^2 + \gamma^2) \sinh \alpha l \sin \gamma l}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{24} &= k_{42} = EI \frac{2\alpha \gamma (\alpha \cosh \alpha l \sin \gamma l - \gamma \sinh \alpha l \cos \gamma l)}{\gamma^2 \sinh^2 \alpha l - \alpha^2 \sin^2 \gamma l}, \\
 k_{55} &= \frac{EA}{l}
 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし

$$\alpha^2 = \beta^2 - K^2, \quad \gamma^2 = \beta^2 + K^2, \quad \beta^4 = \frac{k_s}{4EI}, \quad K^2 = \frac{P}{4EI} \quad (5)$$

1.3 軸圧縮力をうけている梁要素の剛性マトリックス

軸圧縮力をうけている梁要素の応力を図-3に示すように S_1, S_2, S_3, S_4 、ひずみを v_1, v_2, v_3, v_4 、この要素の剛性マトリックスを $[k_{BC}]$ とすると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{Bmatrix} = [k_{BC}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

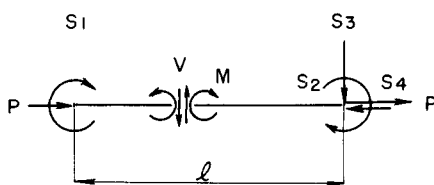


Fig.3

ここで

$$[k_{BC}] = \begin{bmatrix} P \frac{\mu l \cos \mu l - \sin \mu l}{\mu (\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2)} & P \frac{\sin \mu l - \mu l}{\mu (\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2)} & P \frac{1 - \cos \mu l}{\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2} & 0 \\ P \frac{\sin \mu l - \mu l}{\mu (\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2)} & P \frac{\mu l \cos \mu l - \sin \mu l}{\mu (\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2)} & P \frac{1 - \cos \mu l}{\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2} & 0 \\ P \frac{1 - \cos \mu l}{\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2} & P \frac{1 - \cos \mu l}{\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2} & -P \frac{\mu \sin \mu l}{\mu l \sin \mu l + 2 \cos \mu l - 2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし $\mu^2 = \frac{P}{EI}$ (8)

三角関数を μl のべき級数に展開し、高次の項を省略すれば

$$[k_{BC}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} (1 - \frac{1}{30} \frac{Pl^2}{EI}) & \frac{2EI}{l} (1 + \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & -\frac{6EI}{l^2} (1 - \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & 0 \\ \frac{2EI}{l} (1 + \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & \frac{4EI}{l} (1 - \frac{1}{30} \frac{Pl^2}{EI}) & -\frac{6EI}{l^2} (1 - \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & 0 \\ -\frac{6EI}{l^2} (1 - \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & -\frac{6EI}{l^2} (1 - \frac{1}{60} \frac{Pl^2}{EI}) & \frac{12EI}{l^3} (1 - \frac{1}{10} \frac{Pl^2}{EI}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} \end{bmatrix} \quad (9)$$

2. 要素の変位変換マトリックス

2.1 弾性床上の梁要素の変位変換マトリックス

軸圧縮力をうけている弾性床上の梁要素を図-4に示すように節点 i, j, k 間にあるものとし、節点の変位を $r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{j1}, r_{j2}, r_{j3}, r_{k1}, r_{k2}, r_{k3}$, この要素の変位変換マトリックスを $[Q_p]$ とすると

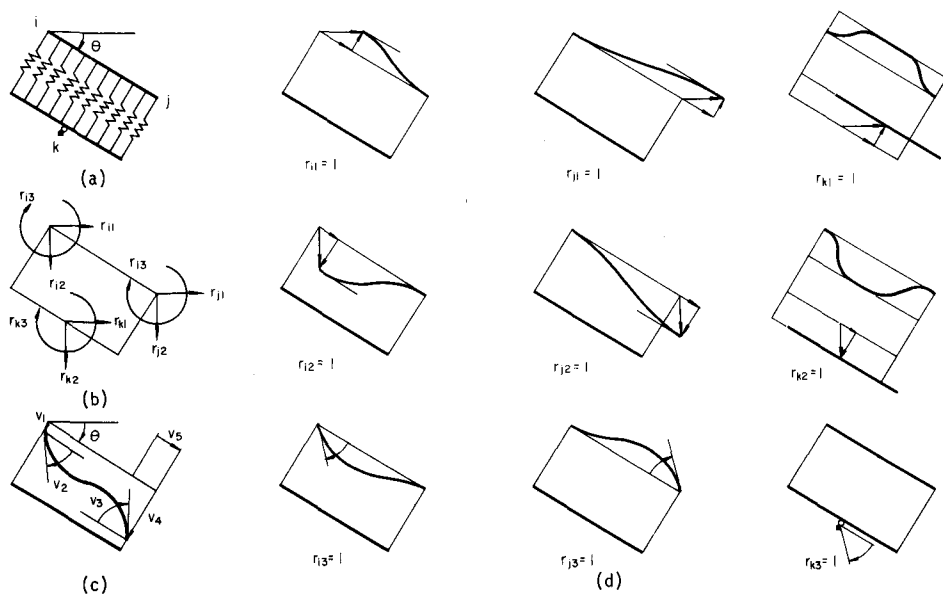


Fig.4

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{Bmatrix} = [a_p] \begin{Bmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \\ r_{j1} \\ r_{j2} \\ r_{j3} \\ r_{k1} \\ r_{k2} \\ r_{k3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \\ r_{j1} \\ r_{j2} \\ r_{j3} \\ r_{k1} \\ r_{k2} \\ r_{k3} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2.2 軸圧縮力をうけている梁要素の変位変換マトリックス

軸圧縮力をうけている梁要素が図-5に示すように節点 i, j 間にあるものとし、節点の変位を $r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}, r_{j1}, r_{j2}, r_{j3}$, この要素の変位変換マトリックスを $[a_{BC}]$ とすると

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} = [a_{BC}] \begin{Bmatrix} r_{i1} \\ r_{i2} \\ r_{i3} \\ r_{j1} \\ r_{j2} \\ r_{j3} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$[a_{BC}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

3. 運動方程式

構造物全体の变位変換マトリックスを $[a]$, 各要素の剛性マトリックスを対角線上に並べたマトリックスを $[k]$ とすると、構造物全体の剛性マトリックス $[K_0]$ は

$$[K_0] = [a]^T [k] [a] \quad (13)$$

境界条件により行と列を取り除く等の処理を行ない、さらに各質点の質量条件等より定まる自由度に対応するように剛性マトリックスを縮小する。

運動方程式は

$$[M]\{\ddot{r}\} + [C]\{\dot{r}\} + [K]\{r\} = \{R\} \quad (14)$$

ここで $[M]$: 質量マトリックス, $[C]$: 減衰係数マトリックス, $[K]$: 剛性マトリックス,

$\{r\}$: 各節点の変位を表わす列ベクトル, $\{R\}$: 各節点に作用する外力を表わす列ベクトル

あとがき

要素の支持条件、構造物の境界条件、地震応答解析の詳細・適用については講演時に発表する。

参考文献

- 1) 栗林・飯田: 橋梁基礎の剛性マトリックス, 第25回年次学術講演会講演集 I-220, 昭和45年11月
- 2) 栗林・飯田: 基礎構造の剛性マトリックス, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集 pp. 386-393, 日本鋼構造協会, 昭和46年6月

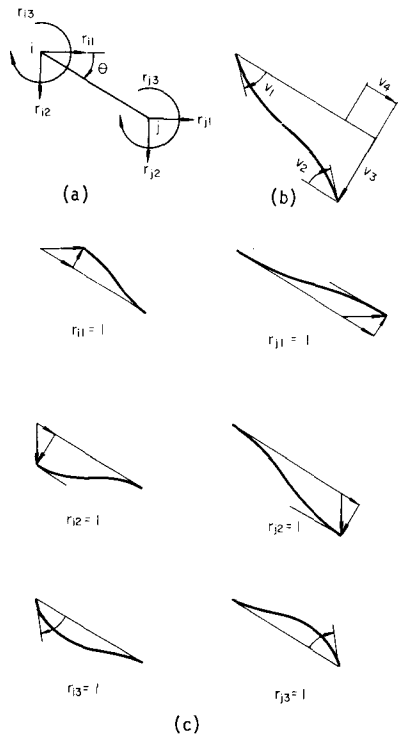


Fig.5