

1. まえがき

二層地盤あるいは道路舗装などのように、地盤上に板があるとみなせる構造系に何らかの動荷重が作用するときの板-地盤系の相互作用の問題の一つとして、著者は先に、周期荷重が板に作用する場合の板の波動伝播機構の解明を行った¹⁾。その際の解は、解析の便宜上、荷重裏から十分に離れた点におけるものであり、荷重裏の近傍については別の解析手法が必要となるものであった。

本論文は、前論を補うべく、荷重の近傍における板の挙動の解明を目的としたものであり、解析対象として板に円型等分布荷重が周期的に作用する場合を取り上げ、前論と同様、地盤を半無限弾性体と仮定して解析を行い、算例として、荷重中心裏における板のたわみ、曲げモーメントおよび地盤表面の応力を求めたものである。

2. 解法

1) 基礎方程式 図-1に示すように、板の中点を $z=0$ とする円筒座標 (r, θ, z) を設け、地盤の変位をそれぞれ (u, v, w) とする。しかるとき、変形は当然 z 軸に関して対称となるから、板の振動は次式で表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \bar{w}_p + \frac{S_1 H}{D} \frac{\partial \bar{w}_p}{\partial t^2} = \frac{1}{D} \{ \bar{g}(r, t) - \bar{R}(r, t) \} \quad (1)$$

ここに $\bar{w}_p$: 板のたわみ, $\bar{g}(r, t) = g_0 e^{i p t}$

図-1

$\bar{R}(r, t)$: 地盤反力, D : 板剛度, H : 板厚, S_1 : 板の密度

いま、円型等分布荷重 $g(r, t)$ を Fourier Bessel にて表わせば

$$\bar{g}(r, t) = \frac{P}{\pi r_0} \int_0^\infty J_1(k r_0) J_1(k r) dk \cdot e^{i p t}, \quad P = \pi r_0^2 g_0 \quad (2)$$

板および地盤は定常運動を行っていると仮定し、式(1)に

$$\bar{w}_p = w_p \cdot e^{i p t}, \quad \bar{R}(r, t) = R(r) e^{i p t} \quad \text{および} \quad \bar{g}(r, t) = \frac{P}{\pi r_0} J_1(k r_0) J_1(k r)$$

を代入すれば次式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right)^2 w_p - \lambda^* w_p = \frac{1}{D} \left\{ \frac{P}{\pi r_0} J_1(k r_0) J_1(k r) - R(r) \right\} \quad (3)$$

ここに $\lambda^* = S_1 H p^2 / D$

式(3)を解き、 r に関して 0 から ∞ まで積分を行えば、式(2)より指定の荷重に対する解がえられることになる。

他方、地盤の変位、応力は周知のように次式で与えられる。

$$W = \left[A_0 \frac{\alpha}{h^2} e^{-\alpha z_2} - C_0 \frac{h^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] \cdot H_0^{(2)}(kr) e^{i p t} \quad (4-1)$$

$$\sigma_z = G \left[A_0 \frac{-2k^2 + j^2}{h^2} e^{-\alpha z_2} + 2C_0 \frac{\beta h^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] \cdot H_0^{(2)}(kr) e^{i p t} \quad (4-2)$$

$$\tau_{zr} = G \left[A_0 \frac{2\alpha}{h^2} e^{-\alpha z_2} - C_0 \frac{h^2 + \beta^2}{j^2} e^{-\beta z_2} \right] \frac{\partial H_0^{(2)}(kr)}{\partial r} e^{i p t} \quad (4-3)$$

$$\text{ここに } h^2 = \alpha^2 + h^2 = \beta^2 + j^2, \quad h = p/v_0, \quad j = p/v_1, \quad z_2 = z - H/2$$

$$v_0 = \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}, \quad v_1 = \sqrt{G/\rho}, \quad \lambda, G: \text{ Lamé の定数}$$

なお、上式において $z_2 \rightarrow \infty$ のとき変位、応力が 0 または進行波に限られるので、 α, β は正の実数かまたは正の虚数を意味する。

ii) 板のたわみ $\bar{w}_p$, モーメント M_r, M_θ および地盤の応力 σ_z

板と地盤との接触面 ($z_2 = 0$) において次のような連続条件式を考える。

$$[W]_{z_2=0} = \bar{w}_p, \quad [\sigma_z]_{z_2=0} + \bar{R}(r, t) = 0, \quad [\tau_{zr}]_{z_2=0} = 0 \quad (5-1, 2, 3)$$

$$\text{式(4-3), (5-3) より直ちに} \quad C_0 = \frac{2\alpha j^2}{h^2(k^2 + \beta^2)} A_0. \quad (6)$$

式(4-1), (5-1) および式(6)より, $\bar{w}_p$ が次式のように表わされる。

$$\bar{w}_p = \alpha \epsilon \cdot A_0 J_0(kr) e^{i p t}, \quad \alpha \epsilon = \frac{\alpha(-k^2 + \beta^2)}{h^2(k^2 + \beta^2)} \quad (7)$$

同様に,

$$-\bar{R}(r, t) = [\sigma_z]_{z_2=0} = \alpha \cdot A_0 J_0(kr), \quad \alpha = G \frac{(k^2 + \beta^2)(-2k^2 + j^2) + 4\alpha\beta k^2}{h^2(k^2 + \beta^2)} \quad (8)$$

式(7), (8) および式(3)より A_0 を求めれば次の内容となる。

$$A_0 = \frac{P}{\pi D} \frac{J_1(kr_0)}{r_0} \frac{1}{\alpha \epsilon (k^2 - \lambda^2) - \alpha/D} \quad (9)$$

式(6)より

$$C_0 = \frac{P}{\pi D} \frac{J_1(kr_0)}{r_0} \frac{2\alpha j^2}{h^2(k^2 + \beta^2) \{ \alpha \epsilon (k^2 - \lambda^2) - \alpha/D \}} \quad (10)$$

式(9), (10) を式(7) および式(8) に代入すれば, $\bar{w}_p$ および $[\sigma_z]_{z_2=0}$ が結局、次式のように求められる。

$$\bar{w}_p = \frac{PH^2}{\pi D R_0} \int_0^\infty \frac{\gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) J_0(\gamma a) d\gamma \cdot e^{i p t} \quad (11)$$

$$[\sigma_z]_{z_2=0} = \frac{PH^2}{\pi D} \int_0^\infty \frac{a}{R^2} \frac{R(\gamma)}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) J_0(\gamma a) d\gamma \cdot e^{i p t} \quad (12)$$

また、板の曲げモーメント M_r, M_θ を求めれば

$$M_r = \frac{P}{\pi R_0} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 \gamma \gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) \left\{ \gamma J_0(\gamma a) + (\mu_1 - 1) \frac{J_1(\gamma a)}{a} \right\} d\gamma \cdot e^{i p t} \quad (13)$$

$$M_0 = \frac{P}{\pi R_0} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 \gamma \varphi}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) \left\{ \mu_1 \gamma J_0(\gamma a) + (1 - \mu_1) \frac{J_1(\gamma a)}{a} \right\} d\gamma \cdot e^{i\varphi t} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに} \quad K(\gamma) &= \gamma \varepsilon^3 \gamma^4 - 6 \frac{\bar{P}}{\gamma} (1 - \mu_1) \varepsilon \gamma - 6 \frac{1 - \mu_1}{\gamma} R(\gamma) \\ R(\gamma) &= (2\gamma^2 - 1)^2 - 4\gamma \gamma' \gamma^2 \\ \gamma &= (\varphi^2 - \gamma'^2)^{1/2}, \quad \gamma' = (\gamma^2 - 1)^{1/2}, \quad \varphi = h/\gamma \\ \varepsilon &= a_0/R_0 = \gamma H, \quad a_0 = r_0 \gamma, \quad a = r \gamma \\ R_0 &= r_0/H, \quad \gamma = G_1/G, \quad \bar{P} = S_1/S, \quad \gamma = h/\gamma \end{aligned}$$

表 - 1

K	a ₀	γ _R
10	0.1	1.112469380
	0.2	1.135922559
	0.3	1.149717091
	0.4	1.147446430
	0.5	1.127985090
	0.6	1.103311335
	0.7	1.073498997
	0.8	1.044875812
	0.9	1.020567807
	1.0	1.003919300
50	0.1	1.109700266
	0.2	1.112425953
	0.3	1.084586673
	0.4	1.043103514
	0.5	1.009020534
100	0.1	1.106372467
	0.2	1.090151572
	0.3	1.043021025
	0.4	1.004314698
250	0.1	1.097179867
	0.2	1.047829133
	0.3	1.000831877
500	0.1	1.084013742
	0.2	1.013885728
1000	0.1	1.063419303

3. 算例

いま, $\mu_1 = 1/6$, $\mu = 1/4$ ($\lambda = G$), $S_1 = 2.3 \text{ g/cm}^2$, $S = 1.8 \text{ g/cm}^2$
 および $R_0 = 1.0$ とし, $K = C_1/C$ および a_0 の値の値に対して, 荷重
 中心より ($a=0$) における板のたわみ $\bar{w}_p$, 曲げモーメント $M_R \equiv M_0$ お
 よび地盤の応力 $[\sigma_z]_{z=0}$ を求めれば次の通りである。

式(11)～式(14)の被積分関数は表-1に示すように極限を有してあ
 り, この発散積分を何らかの形で正則化するように積分路を避けるな
 ればならないが, いま γ , γ' の (無限遠の) 条件を満足するような図
 -2 に示す積分路を遂行²⁾。

しかるとし, 式(11)～式(14)の積分は, たとえば

$$[\bar{w}_p]_{a=0} = \frac{PH^2}{\pi DR_0} \left[\mp P \int_0^\infty \frac{\gamma}{K(\gamma)} J_1(\gamma a_0) d\gamma - i\pi \text{Res} \left(\frac{\gamma J_1(\gamma a_0)}{K(\gamma)}; \gamma_R \right) \right]$$

ここに $\mp P \int_0^\infty$: Cauchy の主値

Res : 極 γ_R における留数

の形で表わされ, 上式の数値計算の結果は

$$[\bar{w}_p]_{a=0} = \frac{PH^2}{\pi DR_0} [f_1(K, a_0) + i f_2(K, a_0)] e^{i\varphi t}$$

$$[M_R]_{a=0} = [M_0]_{a=0} = \frac{P}{\pi R_0} [g_1(K, a_0) + i g_2(K, a_0)] e^{i\varphi t}$$

$$[\sigma_z]_{z=0} = \frac{PH}{\pi D} [h_1(K, a_0) + i h_2(K, a_0)] e^{i\varphi t}$$

の形で表わし, f_1, f_2, g_1, g_2 および h_1, h_2 の値
 を図-3に示す。

なお, たわみおよび曲げモーメントの振中をそ
 れぞれ図-4および図-5に示す。

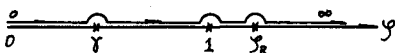


図 - 2

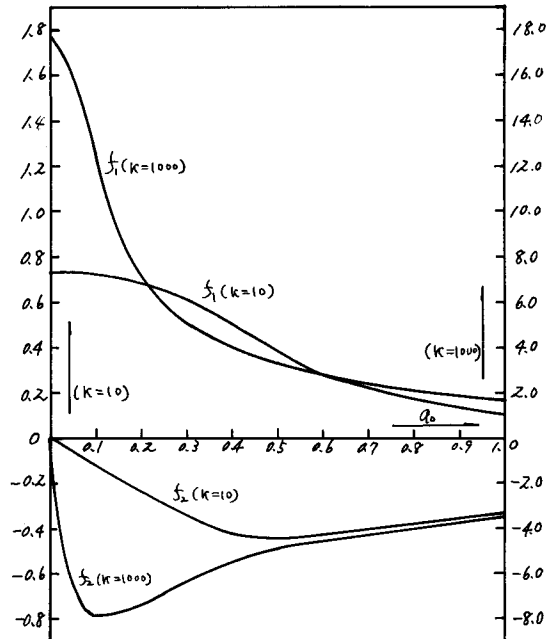
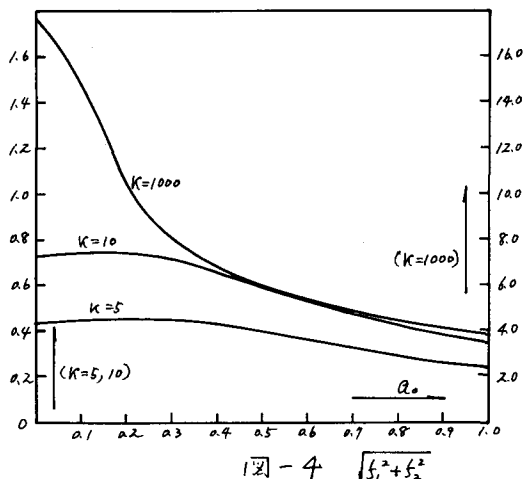
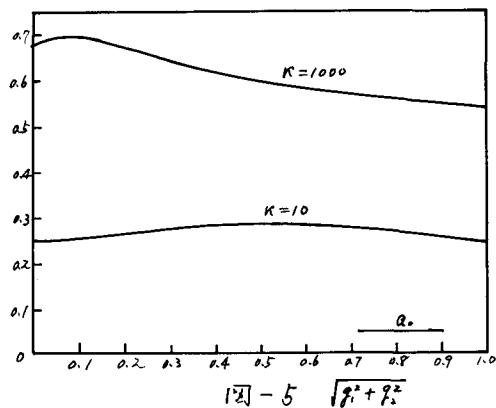
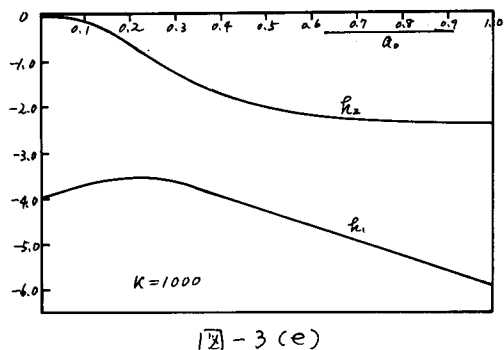
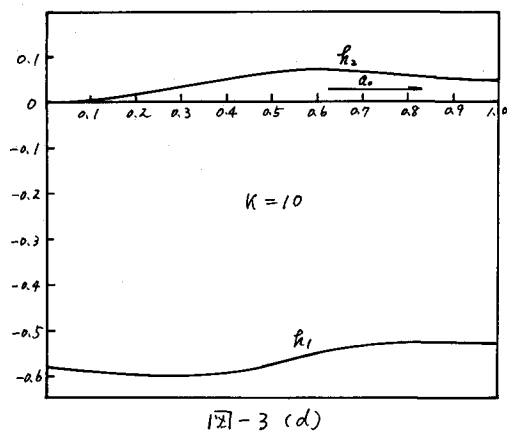
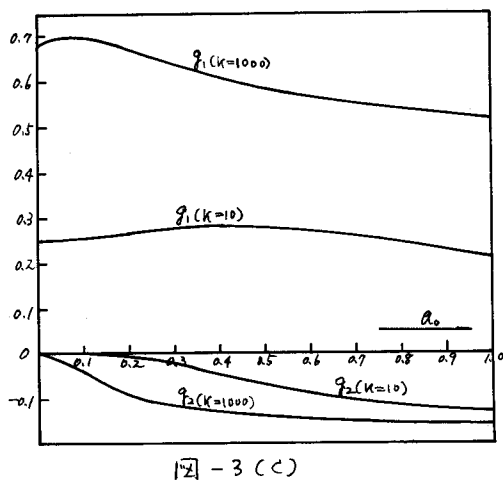
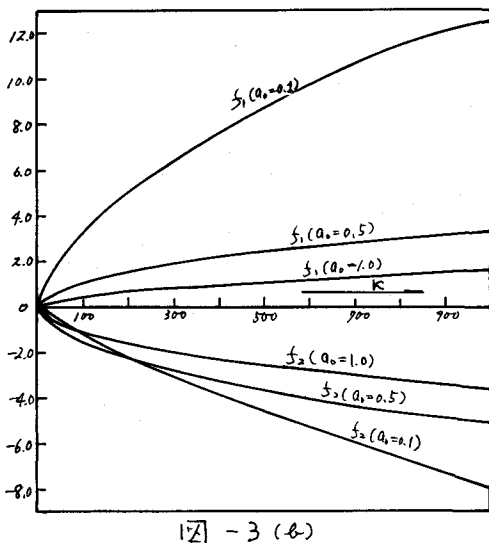


図 - 3 (a)



- 1) 山崎・横田, "周期荷重を受ける弾性地盤上の板の波動解析", 土木学会第25回年次学術講演集, 昭和43年11月
- 2) 例えば, 金井, 田治見, 大沢, 小林, "地震工学", pp 93~95, 彰国社, 昭和43年11月 を参照。
- 3) 主値の数値計算方法について, 日下教授, 田治見先生の御助言を頂いた。寛して謝意を表します。