

I-91 構造物の立体振動解析について

(株) 長大橋設計センター 正員 柴田 定昭
 “ “ “ 草 原 義 博
 “ “ “ ○ 友 沢 武 昭

1. ま え が き

近年、マトリクス法による、立体構造物の振動解析が、盛んに行なわれているが、節点数が増加する場合、剛性マトリクスの大きさは、増大し、電子計算機の容量、あるいは、演算時の精度、時間等の問題解決方法は、重要な事項であると考えられる。これらの問題に対し、バンドマトリクスを用いるとか、あるいは、構造分割による解決法を述べた、文献が多く見られる。筆者等は、変形法を用いて、300節点近い、立体骨組構造の振動解析を心事としたため、剛性マトリクスの縮小問題に取り組んだ。以下この方法を紹介するとともに、地震応答計算で、平均速度応答スペクトル $\dot{S}_v$ を用いた場合に、構造物の任意部材において、最大応答を示すような地震動方向、および部材の最大応答値(部材端応力、あるいは、節点変位)を、簡単に、しかも、比較的妥当な値として、見い出す方法を提案する。

2. 剛性マトリクスの縮小

本解法は、立体骨組構造振動系の剛性マトリクスを、変形法の手法により、求めてゆく。

部材 m について、材端力 f と、変位 y の関係は、一般座標系に変換したものは、

$$f^m = \sum_{i=1}^n T y = \sum_{i=1}^n y \quad , \quad f = T^T \sum_{i=1}^n T y = K y \quad \text{と} \quad \text{なる。} \quad (1)$$

ここに、 m 印は、部材 m についてのものを示し、 $*$ 印は、部材座標系での量を示す

T は、座標変換のマトリクス、 $\sum$ は応力マトリクス、 K は、剛性マトリクス である。

(1) 式を用いて、一般座標系での釣合式 $1p = K y$ が得られる——(2)

i) 外力条件によるマトリクスの縮小 立体構造においては、1部点あたり、6成分の外力作用を受ける。振動問題においては、これらの外力項は、地震による、慣性抵抗力であるが、工学的に見れば、全節点に6成分の外力がすべて、作用すると、考える必要はない。いま、(2) 式において、外力項 $1p$ のなかには 0 のものがあるならば、(2) 式は、次のように縮小できる。

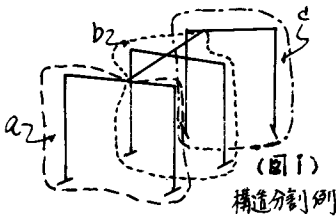
$$\begin{Bmatrix} 1p_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad 1p_1: 0 \text{でない外力成分} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} (3) \text{式より} \quad y_2 &= -K_{22}^{-1} K_{21} y_1 \quad \text{より、} \\ \left\{ 1p_1 \right\} &= [K_{11} - K_{12} K_{22}^{-1} K_{21}] y_1 = \hat{K} y_1 \quad \text{と縮小される。} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) 式の手法では、構造が、やや複雑になると、(3) → (4) の過程で、 K_{22}^{-1} を求める場合かなり大きな、逆行列を求める操作が、必要となる。そこで、つぎに示すような、構造分割

の考え方を、用いる。

ii) 構造分割. 構造全体を、図1に示すように、比較的少数の節点より成る、構造部分に分割し、1つの構造部分内の節点の自由度を、 α, β, γ のように分類する。



- i) 他の構造部分と、関連をもつか、あるいは、その節点に、外荷重が、作用する方向の自由度に関する $\{P\}, \{y\}$
- ii) 他の構造部分と関連せず、しかも、荷重が、作用しない、方向の自由度に関する $\{P\}=\{0\}, \{y\}$

各、構造部分 $a, b, c, \dots$ について、 $\{P, 0\}, \{y_1, y_2\}$ を分離して、(2)式を表現すると、(5)式となる。

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ 0 \\ P_b \\ 0 \\ P_c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} \end{matrix} \begin{bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a & k_{ab} & 0 & k_{ac} & 0 & \dots \\ k_{21}^a & k_{22}^a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ k_{ba} & 0 & k_{11}^b & k_{12}^b & k_{bc} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & k_{21}^b & k_{22}^b & 0 & 0 & \dots \\ k_{ca} & 0 & k_{cb} & 0 & k_{11}^c & k_{12}^c & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^c & k_{22}^c & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{a1} \\ y_{a2} \\ y_{b1} \\ y_{b2} \\ y_{c1} \\ y_{c2} \end{Bmatrix}$$

k は構造部分 a に対する k_{ab} は a, b が連なる部分等を示す。

(5)

(5)式の対角線上の小マトリクスについて、それぞれ、

$$\begin{Bmatrix} k_{11}^a & k_{12}^a \\ k_{21}^a & k_{22}^a \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{a1} \\ y_{a2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta P_a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

なにかが成り立ち、(4)式の操作と、同様に、マトリクスは縮小され、

$$\Delta P_a = K_{aa} y_{a1} \quad \text{但し、} \quad K_{aa} = [k_{11}^a - k_{12}^a k_{22}^{a-1} k_{21}^a]$$

なにかが成り立ち、これをを用いて、

(5)式は、 α, β, γ のように縮小される。

$$\begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \\ P_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} & K_{ac} \\ K_{ba} & K_{bb} & K_{bc} \\ K_{ca} & K_{cb} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{a1} \\ y_{b1} \\ y_{c1} \end{Bmatrix}$$

これを簡単に $\hat{P} = \hat{K} \cdot \hat{y}$ (6)

(6)式は、最終的に縮小され、形である。こゝで、節点力 K 、(6)式中で消去された変位、あるいは、変位及力等を求める場合、これらのうち、必要なものに着目して、(6)式の $\hat{y}$ を用いて、表す。

$$\begin{matrix} \hat{F} = \hat{S} \hat{y} & , & y_2 = \hat{A} \hat{y} & , & R = \hat{R} \hat{y} \\ \text{(外力)} & & \text{(消去した変位)} & & \text{(変位及力)} \end{matrix}$$

これらは、(6)式の解として得られる $\hat{y}$ を用いて、直接求めることができる。

こゝに、 $\hat{S}$ は、(1)のオ1式と、(4)のオ1式の関係、 $\hat{A}$ は (4)のオ1式の関係、

また $\hat{R}$ は、変位及力に関する (1)のオ2式と、(4)のオ1式の関係 から、それぞれ得られる。

3. 地震応答.

i) 振動方程式. 節点 i について、並進方向の質量を M 、回転質量を I と表し、質量マトリクス、 M 、および m_x, m_y, m_z を定義する。

つまり、 $M_L = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $m_{xL} = \begin{bmatrix} m_{x1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 等。これを、各節点について、配列したものを、 M , m_x , m_y , m_z とし、地動を X_0 , Y_0 , Z_0 とすれば、振動方程式は、縮小した、(6) 式の形になる。

$$\hat{M} \ddot{Y} + \hat{K} Y = -(\hat{M}_x \ddot{X}_0 + \hat{M}_y \ddot{Y}_0 + \hat{M}_z \ddot{Z}_0) \quad (9)$$

(9) 式の強制項を 0 とし、 $Y = \phi \sin \omega t$ とおき、固有値を求めることにし、円振動数 ω と、振動モード ϕ_n が、自由度の数だけ得られる。これを、 M , K とする。各振動モードが重なり表われるとき、これを加えて、(7) 式より、荷重に対するモードも次のように定義される。

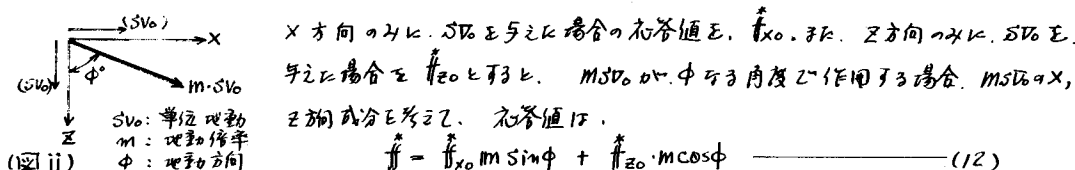
$$\begin{aligned} \overline{P}_1 &= \hat{S} P & \overline{P}_2 &= \hat{A} P & \overline{P}_3 &= \hat{R} P \\ (\text{スケーラモード}) & & (\text{三角形変位モード}) & & (\text{変位反力モード}) \end{aligned} \quad (10)$$

ii) 地震動に対する応答。 (9) 式の解を、 $Y = \overline{P} \xi$ とおくと、振動方程式は、各次数毎の振動に分離され、(モダリティ) ξ が求まる。応答値は、 ξ を用いて、これを求め、次のように求める。

$$\hat{Y} = \overline{P} \xi, \quad \hat{F} = \overline{P} \xi, \quad \hat{y}_x = \overline{P}_1 \xi, \quad \hat{y}_z = \overline{P}_3 \xi \quad (11)$$

＝すなわち、 $S-V$ 曲線を用いて、応答を、求める場合は、工学的に必要で、最大値を、得ようとするものであるから、最大応答を生じるような地動方向について、次のように、取扱うことにした。

図のように、 X , Z 面内の任意方向地動 ($m \cdot S-V_0$) が、作用する場合の、任意部材応力最大値 $\hat{F}_{max}$ (11) 式より、 y_x, y_z にも関係する。その時の地動の方向 (ϕ°) について、



$$\hat{F} = \hat{F}_{x0} m \sin \phi + \hat{F}_{z0} m \cos \phi \quad (12)$$

$$\text{最大応答を生じる } \phi \text{ は、} \frac{d\hat{F}}{d\phi} = m(-\hat{F}_{x0} \cos \phi + \hat{F}_{z0} \sin \phi) = 0 \quad \therefore \tan \phi = \hat{F}_{x0} / \hat{F}_{z0} \quad (13)$$

$$\text{＝すなわち、} \hat{F}_{max} = m(\hat{F}_{x0}^2 + \hat{F}_{z0}^2) / \sqrt{\hat{F}_{x0}^2 + \hat{F}_{z0}^2} \quad \text{となる。}$$

4. 計算例

計算例に用いたモデル

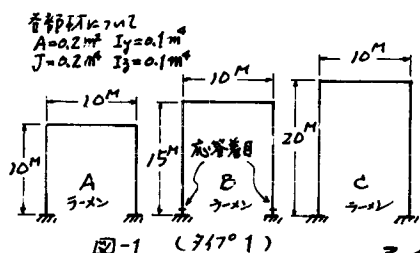


図-1 (717°1)

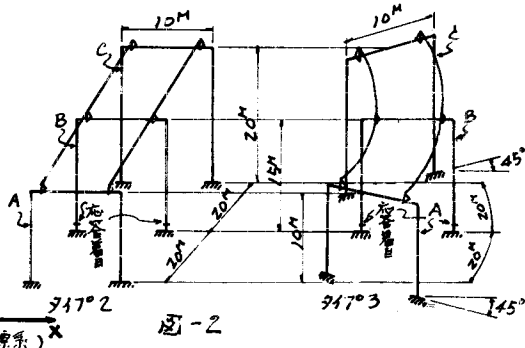


図-2

図-1 に示すような、3 基の門型ラーメンを考える。これらの各々は、平面的な構造であるため、各ラーメンについて、面内方向、面外方向の 2 種類の平面問題に分割して、解析することはできる。一方これらの 3 基の天端を、図-2 のように、互いに連結した場合、3 基は、一体となって、立体構造物としての性状を示す。そこで、B ラーメンに着目し、717°1, 2, 3 中で、B ラーメンが、それぞれ、どのような性状を示すかについて観る。

各節の断面性能は、 $A=0.2m^2$, $I_y=0.1m^4$, $I_z=0.1m^4$, $J=0.2m^4$ とした。継材は、A, B, C の 2 径間にわたる。連続ゲタを想定し、香ラ-メンとの適合条件は、橋軸直角軸まわりのヒンジで、結合されたものとする。それ簡單のため、これらの継材は、円柱体と仮定した。質量は、香ラ-メンと、継材との接点に、それぞれ、100t の X 方向重量、Z 方向重量のみを考慮し、上下方向、および、回転方向の慣性力は、0 とした。なお、これらのモデルは、一般、連続桁形式を想定しているが、目的は、平面構造と、組み合せて、立体構造を組み立てた場合、元の平面構造の性質が、いかに変化するかを、観る、ことである。構造のゲタ等は、実在の構造物を、モデル化したものではない。地震応答計算のためのデータとしては、減衰定数を、 $\alpha=0.02$ とし、地震は、平均応答スペクトル SV を、最大 100gal とした。X 方向、Z 方向にそれぞれ独立に作用させた。(応答計算は、エ-タルアナリシスによる) 以下に、計算結果を示す。

(応答は、B ラ-メンの左右脚下端のみを、観る。) 表-1, 2 は、B ラ-メンの面内、面外方向曲げモーメントを、タイプ 1 と比較したものであり、(12) 式中の $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$, $\ddot{z}_0$ は、 $\ddot{x}_0$ は、 $\ddot{z}_0$ に対して、 $\phi=90^\circ$ の地震方向。表-1, 2 は、B ラ-メンの面内、面外方向曲げモーメントを、タイプ 1 と比較したものであり、(12) 式中の $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$, $\ddot{z}_0$ は、 $\ddot{x}_0$ は、 $\ddot{z}_0$ に対して、 $\phi=90^\circ$ の地震方向。表-1, 2 は、B ラ-メンの面内、面外方向曲げモーメントを、タイプ 1 と比較したものであり、(12) 式中の $\ddot{x}_0$, $\ddot{y}_0$, $\ddot{z}_0$ は、 $\ddot{x}_0$ は、 $\ddot{z}_0$ に対して、 $\phi=90^\circ$ の地震方向。

Z 軸まわり曲げモーメント応答 Mz (B ラ-メン面内曲げモーメント) (バ-トル和)

タイプ	応答値	X 方向 SV (100gal) に対する $\ddot{x}_0$ と $\ddot{z}_0$ の比	Z 方向 SV (100gal) に対する $\ddot{z}_0$ と $\ddot{x}_0$ の比	任意方向から地震を受けた場合の最大応答値 $\ddot{x}_0$ と $\ddot{z}_0$ の地震方向
タイプ 1 左脚	248.600	0.0	248.600	$\phi=90^\circ$
B ラ-メン 右脚	248.600	0.0	248.600	$\phi=90^\circ$
タイプ 2 左脚	253.485	2.675	253.499	$\phi=89^\circ 23' 44''$
B ラ-メン 右脚	253.485	2.695	253.500	$\phi=89^\circ 23' 27''$
タイプ 3 左脚	242.264	64.989	250.829	$\phi=74^\circ 59' 04''$
B ラ-メン 右脚	255.171	74.347	265.782	$\phi=73^\circ 45' 49''$

表-1 表-2

図-1 は、(12) 式中の $\ddot{x}_0$ と $\ddot{z}_0$ の比 (減衰) の各項を、B ラ-メンの左右脚に作用したものと仮定し、タイプ 1 は、完全に平面構造であり、かつ、質量に対する質量分布が、 $\phi=90^\circ$ の地震方向に等しいと仮定した。応答分布は、各方向振動の固有周期が、

X 軸まわり曲げモーメント応答 Mx (B ラ-メン面外曲げモーメント) (バ-トル和)

タイプ	応答値	X 方向 SV (100gal) に対する $\ddot{x}_0$ と $\ddot{z}_0$ の比	Z 方向 SV (100gal) に対する $\ddot{z}_0$ と $\ddot{x}_0$ の比	任意方向から地震を受けた場合の最大応答値 $\ddot{x}_0$ と $\ddot{z}_0$ の地震方向
タイプ 1 左脚	0.0	470.505	470.505	$\phi=0^\circ$
B ラ-メン 右脚	0.0	470.505	470.505	$\phi=0^\circ$
タイプ 2 左脚	49.517	295.353	299.475	$\phi=9^\circ 31' 12''$
B ラ-メン 右脚	49.528	295.348	299.472	$\phi=9^\circ 34' 08''$
タイプ 3 左脚	37.438	123.046	128.616	$\phi=16^\circ 59' 30''$
B ラ-メン 右脚	125.445	128.624	179.668	$\phi=44^\circ 08' 24''$

2.1 桁の表に示している。これらの分布状況は、立体効果が、増すほど、広い範囲に分布するものと見られる。タイプ 2 の面内、面外 応答を、観る場合、表-1, 2 の左右脚ともほとんど同じ大抵の応答を示しており、図-3 の、面内、面外 応答に、 $\phi=90^\circ$ の地震方向に等しいと仮定した。タイプ 2 は、完全に平面構造を形成しているといえる。一方、タイプ 3 では、図-3 に示す、3 基のラ-メンの面内、面外振動が互いに影響しあひ、複雑な立体振動を示している。表-1, 2 の左右脚の差は、面内 6% 面外 40% 程度である。これらの結果については、より詳細な考察、が出来るが、それ詳細な考察条件の違ひ、ラ-メン配置の違ひにより、大きく異なるものであるから、直接土木構造に於いては、注意することはできない。しかし、平面構造を、単純に連続した場合でも、応答は、表-1, 2 に示すように、大きく変化することがあるから、設計面に於いても、立体効果を、考慮した解析が、必要に、なされるべきである。以上

A	B	C	周期	B 右脚面内モーメント	B 右脚面外モーメント
0.6	91701	タイプ 1	0.6	470.505	0.465
0.5	0.0		0.5		
0.4			0.4		
0.3	249.260		0.3	0.0	0.270
0.2			0.2		
0.1			0.1		
0.5	91702	タイプ 2	0.5	295.348	0.369
0.4	0.000		0.4		0.344
0.3	252.200		0.3	0.002	0.162
0.2	25.501		0.2	0.002	0.041
0.1	0.000		0.1	0.000	
0.5	91703	タイプ 3	0.5	25.598	0.331
0.4	253.397		0.4	126.021	0.255
0.3	11.940		0.3	2.767	0.167
0.2	27.566		0.2	0.000	0.040
0.1	0.000		0.1		

図-3 1. マトリクス構造解析入門 R. K. ヴィーラ 山田川柳建設院 2. マトリクス有限要素法 A. C. W. ジョージ・ウィットマン 機械科