

I-71 衝撃を受ける扇形板の非線形過渡振動

九州大学工学部 正員 橋本 武
長崎大学工学部 正員 ○高橋和雄

1. 緒言 薄板の過渡振動問題において、応答振幅が板厚に比べて無視できない場合には、板面内の引張力に起因する非線形項の影響が顕著になる。このような場合には、板の有限変形理論に基づいて解析しなければならないが、その運動方程式に非線形項が含まれるため、自由振動の項と強制振動の項との重ね合わせが不可能となる。したがって、過渡振動の解析がはなはだ困難になり、このため板の自由振動などの非線形過渡振動を取扱った研究は極めて少ないようである¹⁾。著者らはこれまで近似解法としてガウサン法を用い、かつ Berger の有限変形理論²⁾に基づいて、矩形および扇形板の非線形振動を解明し、その自由振動時における振動数や定常振動時における応答振幅に非線形項の及ぼす影響を検討してきた^{3), 4)}。つづいて、著者らは薄板の非線形過渡振動と解明せんとするものであるが、本論文では矩形ステップや指数関数的減衰パルスの衝撃荷重を受けし直線辺単純支持扇形板を対象に、Bauer の自由変系の過渡振動解析に際して提案した振動法を用いて論ずるのである。

2. 解法 全面に等分布する衝撃荷重 $p f(t)$ の作用を受けし板の非線形曲げ振動の微分方程式は次のごとく与えられる。

$$D \nabla^4 w - N \nabla^2 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p f(t) \quad (1)$$

$$\frac{N h^2}{12 D} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{2 r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{1-\nu}{E h} (N_r + N_\theta) \quad (2)$$

ここに、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ 、 r, θ : 極座標系、

h : 板厚、 ρ : 板の密度、 $D = E h^3 / (12(1-\nu^2))$: 板剛度、

E : 板のヤング率、 ν : 板のポアソン比、 t : 時間、

w : 板のたわみ、 u, v : 板の半径、接線方向の面内変位、

N_r, N_θ : 板の半径、接線方向の面内応力、 p : 荷重強度、 $f(t)$: 外力関数

N : N_r, N_θ と同じ次元をもちつ定数

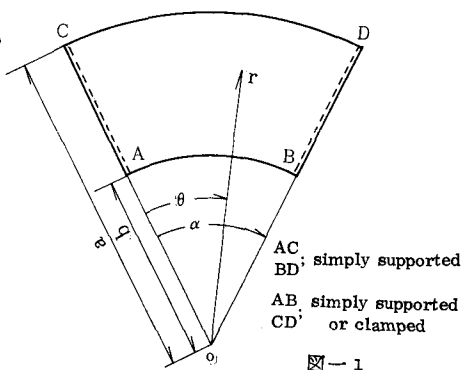


図-1

図-1に示す扇形板の全周に面内変位のないものとすれば、式(2)は次式となる。

$$\frac{N h^2}{12 D} \alpha (a^2 - b^2) = -\frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\alpha} w (\nabla^2 w) r dr d\theta \quad (3)$$

式(1)および式(3)の近似解とすることを、板のたわみ w を次のように仮定する。

$$w = W(r, \theta) \cdot F(t) \quad (4) \quad \text{ここに、} W(r, \theta) : \text{境界条件と満足する座標関数、} F(t) : \text{未知の時周関数}$$

式(4)の座標関数として、扇形板の線形振動時における基本振動の標準関数を用うれば、図-1に示す扇形板の場合には $W(r, \theta)$ が次のように厳密に与えられる。

$$W(r, \theta) = \{A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr) + C_n I_n(kr) + D_n K_n(kr)\} \sin n\theta \quad (4) \quad \text{ここに、}$$

$J_n(kr), Y_n(kr)$: n 次の第1種、第2種 Bessel 関数、 $I_n(kr), K_n(kr)$: 変形コシ n 次の第1種、第2種 Bessel 関数、

A_n, B_n, C_n, D_n : 積分定数、 $\xi = \gamma/a$ 、 $k = a \sqrt{\frac{16 \omega^2}{1-\nu^2}}$: 線形振動の固有値、 ω : 線形振動の固有円振動数

式(3)と式(4)に代入して与えられる結果を式(1)に代入し、かつ標準関数に関して $\nabla^4 w = \rho h \omega^2 w / D$ が成立するとを考慮すれば、式(1)が次のように書き改められる。

$$\omega^2 \rho W F - N D^2 W F + \rho k W \ddot{F} = \rho f(t) \quad (6)$$

式(6)にガウ-ヤン法を適用する。式(3)を用いて \$N\$ と消去すれば、時間に関する 2 階の非線形常微分方程式が求められる。これが結局本題の基礎式になる。

$$\ddot{F} + \omega^2 F + \varepsilon \omega^2 F^3 = \omega^2 \frac{\rho a^4}{E K^3} f(t) \quad (7)$$

$$\therefore \varepsilon = \frac{8}{K^2}, \quad \delta = \frac{6}{1-\mu^2} \frac{\eta^2}{\eta}, \quad \lambda = \frac{48(1-\mu^2)}{\pi} \frac{\eta}{\ell} \frac{1}{K^2}, \quad \mu = b/a \text{ (内外径比)}$$

$$\varphi = \int_{\mu}^1 \{A \times J_x(k\eta) + B \times Y_x(k\eta) + C \times I_x(k\eta) + D \times K_x(k\eta)\} \{A \times J_x(k\eta) + B \times Y_x(k\eta) - C \times I_x(k\eta) - D \times K_x(k\eta)\} d\eta, \quad \eta = \int_{\mu}^1 \{A \times J_x(k\eta) + B \times Y_x(k\eta) + C \times I_x(k\eta) + D \times K_x(k\eta)\}^2 d\eta, \quad \eta = \int_{\mu}^1 \{A \times J_x(k\eta) + B \times Y_x(k\eta) + C \times I_x(k\eta) + D \times K_x(k\eta)\} d\eta$$

式(7)はその式形より明らかのように、非線形常微分方程式であり、\$t=0\$ から、諸言に述べたように、余関数と特殊解とを合わせた形で解くのは手法を適用することから不可能である。\$t>0\$、\$t=0\$ は次のようにその解法と工夫するものがある。

すなわち、式(7)の一般解 \$F(t)\$ と、2つの関数 \$G(t)\$、\$Y(t)\$ とを用いて

$$F(t) = Y(t) + G(t) \quad (8) \quad \text{のように表わし、これを式(7)に代入すれば次式がえられる。}$$

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y + \ddot{G} + \omega^2 G + \varepsilon \omega^2 (Y+G)^3 = \omega^2 \frac{\rho a^4}{E K^3} f(t) \quad (9)$$

上式において、\$G(t)\$ と \$\ddot{G}(t) + \omega^2 G(t) = \omega^2 \frac{\rho a^4}{E K^3} f(t)\$ なる線形微分方程式の特殊解 \$G^*(t)\$ となるように設定すれば、式(9)が関数 \$Y(t)\$ に関する非線形微分方程式となり次のようにえられる。

$$\ddot{Y} + \omega^2 Y = -\varepsilon \omega^2 (Y+G^*)^3 \quad (10)$$

\$\varepsilon < 1\$ の場合には摂動法を用いて式(10)を解くことができ、この際本題の初期条件が次のように与えられると可。

$$F(0) = 0, \quad \dot{F}(0) = 0 \quad \text{すなわち,} \quad Y(0) = -G^*(0), \quad \dot{Y}(0) = -\dot{G}^*(0) \quad (11)$$

いま、\$Y\$ および \$G^*\$ と次のように \$\varepsilon\$ のべき級数に展開できるとする。

$$Y(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \varepsilon^n, \quad t = \xi + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \varepsilon^n \quad (12) \quad \therefore Y_n(\xi), T_n(\xi) : \text{未知関数}$$

式(12)と式(10)に代入すれば

$$\frac{\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{Y}_n(\xi) \varepsilon^n \right\} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \varepsilon^n \right\} - \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \varepsilon^n \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \varepsilon^n \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \varepsilon^n \right\}^3} + \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \varepsilon^n = -\varepsilon \omega^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\xi) \varepsilon^n + G^*(\xi + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\xi) \varepsilon^n) \right\}^3 \quad (13)$$

式(13)と \$\varepsilon\$ のべき級数に展開して、その各べきの係数を零とおけば、次のような定数係数微分方程式がえられる。

$$\ddot{Y}_0 + \omega^2 Y_0 = 0 \quad (14-1)$$

$$\ddot{Y}_1 + \omega^2 Y_1 = 2\dot{T}_1 \dot{Y}_0 + \dot{Y}_0 \ddot{T}_1 - \omega^2 (Y_0 + G^*)^3 \quad (14-2)$$

$$\ddot{Y}_2 + \omega^2 Y_2 = 2\dot{T}_2 \dot{Y}_0 + 2\dot{T}_1 \ddot{Y}_1 - 3\dot{Y}_0 \dot{T}_1^2 + \dot{Y}_1 \ddot{T}_1 + \dot{Y}_0 \ddot{T}_2 - 3\dot{Y}_0 \dot{T}_1 \dot{T}_1 - 3\omega^2 (Y_0 + G^*)(Y_1 + G^* T_1) \quad (14-3)$$

式(14)の \$Y_n(n=0,1,2,\dots)\$ に関する微分方程式は次の初期条件のもとに逐次解くことが出来る。

$$Y_0(0) = -G^*(0), \quad \dot{Y}_0(0) = -\dot{G}^*(0) \quad (15)$$

$$Y_n(0) = 0, \quad \dot{Y}_n(0) = 0, \quad n=1,2,\dots$$

また、\$T_n(n=1,2,\dots)\$ に関する初期条件は式(12)の中

式より \$\xi=0\$ で \$t=0\$ であるから

$$T_n(0) = 0, \quad n=1,2,\dots \quad (16)$$

(i) 矩形ステップ型の衝撃荷重(図-2(a))

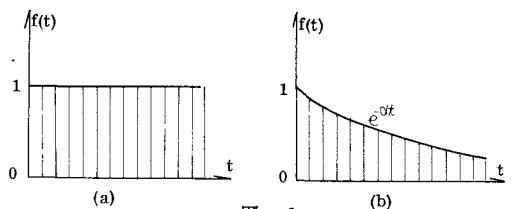


図-2

$f(t)=1$ であるから, $\ddot{q} + \omega^2 q = \omega^2 \frac{PA^0}{EA^3}$ の特解 q^* およびその微係数 $\dot{q}^*$ が次のようにえられる。

$$q^*(0) = \frac{1}{\omega^2} \frac{PA^0}{EA^3}, \quad \dot{q}^*(0) = 0 \quad (16)$$

$t=0$ から 2 , 式(15)の Y_0 に関する初期条件は, 本例では次のように表わされる。

$$Y_0(0) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{PA^0}{EA^3}, \quad \dot{Y}_0(0) = 0 \quad (17)$$

式(14-1)の解と式(17)の初期条件の δ とは解けば, Y_0 が次のように算定される。

$$Y_0 = -\frac{1}{\omega^2} \frac{PA^0}{EA^3} \cos \omega t \quad (18) \quad \text{式(18)およびその微係数と式(14-2)に代入すれば, 次式とうる。}$$

$$\ddot{Y}_1 + \omega^2 Y_1 = \omega^2 \left\{ 2T_1 \frac{PA^0}{EA^3} + \frac{15}{8} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^2 \right\} \cos \omega t + \ddot{T}_1 \omega^2 \frac{PA^0}{EA^3} \sin \omega t + \frac{\omega^2}{4} \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^3 \cos 3\omega t - \frac{3}{2} \omega^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^3 \cos 2\omega t - \frac{5}{2} \omega^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^3 \quad (19)$$

式(19)の解の永年項と定数項のために δ は $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ の係数が零でなければならぬことから, T_1 に関する次の2つの微分方程式がえられる。

$$\ddot{T}_1 + \frac{15}{8} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^2 = 0, \quad \ddot{T}_1 = 0 \quad (20) \quad \text{式(20)と } T_1(0) = 0 \text{ の初期条件の } \delta \text{ とは解けば,}$$

$$T_1 = -\frac{15}{8} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^2 t \quad (21)$$

しるると, 式(19)と式(18)の Y_1 に関する初期条件を用いて解けば, Y_1 が次のように求められる。

$$Y_1 = \frac{1}{32} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^3 (-80 + 65 \cos \omega t + 16 \cos 2\omega t - \cos 3\omega t) \quad (22)$$

同様にして, T_2 および Y_2 と式(14-3)を用いて求めれば, それぞれ次のようにえられる。

$$T_2 = \frac{3465}{256} A^4 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^4 t^2 \quad (23)$$

$$Y_2 = \frac{1}{128} A^5 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^5 \left\{ 2172 - \frac{12407}{8} \cos \omega t - 640 \cos 2\omega t + 15 \cos 3\omega t + 4 \cos 4\omega t - \frac{1}{8} \cos 5\omega t \right\} \quad (24)$$

式(18)〜式(24)と式(12)に代入すれば, Y の近似解が算定され, これを式(9)に代入すれば, 矩形スラブの荷重と受ける扇形板の応答振幅 $F(t)/h$ がえられることとなり, 次のような結果に到達する。

$$F(t)/h = \frac{1}{\omega^2} \frac{PA^0}{EA^3} (1 - \cos \omega t) + \frac{1}{32} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^3 (-80 + 65 \cos \omega t + 16 \cos 2\omega t - \cos 3\omega t) + \frac{1}{128} A^5 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^5 \left\{ 2172 - \frac{12407}{8} \cos \omega t - 640 \cos 2\omega t + 15 \cos 3\omega t + 4 \cos 4\omega t - \frac{1}{8} \cos 5\omega t \right\} \quad (25)$$

$$\therefore \text{ここに, } \xi = t / \left\{ 1 - \frac{15}{8} A^2 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^2 + \frac{3465}{256} A^4 \left(\frac{PA^0}{EA^3} \right)^4 \right\}$$

式(25)において, ξ の係数とすべて消去すれば, 線形の場合の解が次のようにえられる。

$$F(t)/h = \frac{1}{\omega^2} \frac{PA^0}{EA^3} (1 - \cos \omega t) \quad (26)$$

(ii) 指数関数的減衰パルス型衝撃荷重 (図-2(6))

$f(t) = e^{-\alpha t}$ とおいて, (i) の場合と全く同様にして解けば, 本題の解がえられる。すなわち, 式(14-1)〜式

(14-3) から変位に関して α 1 近似解 Y_1 と, 時間に関して α 2 近似解 T_2 を用いて, その解を求めれば, 応答振幅 $F(t)/h$ が次のように算定される。

$$F(t)/h = \frac{1}{1 + (\alpha/\omega)^2} \frac{PA^0}{EA^3} e^{-\alpha t} - \frac{1}{1 + (\alpha/\omega)^2} \frac{PA^0}{EA^3} \left(\cos \omega t - \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{1}{\left\{ 1 + (\alpha/\omega)^2 \right\}^2} \frac{PA^0}{EA^3} \left\{ \left[\frac{1}{1 + 9(\alpha/\omega)^2} + \frac{3}{2} + \frac{1 - 3(\alpha/\omega)^2}{32} - \frac{3}{2} \frac{3 + 4(\alpha/\omega)^2 + (\alpha/\omega)^4}{16(\alpha/\omega)^2 + \{ 3 - (\alpha/\omega)^2 \}^2} \right] \sin \omega t - \frac{1}{1 + 9(\alpha/\omega)^2} e^{-3\alpha t} \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{e^{-\alpha t}}{\alpha/\omega} - \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha/\omega} e^{-2\alpha t} \sin \omega t + \frac{1}{32} \{ -1 + 3(\alpha/\omega)^2 \} \cos 3\omega t - \frac{1}{32} (\alpha/\omega) \{ -3 + (\alpha/\omega)^2 \} \sin 3\omega t + \frac{3}{16} \frac{e^{-\alpha t}}{16(\alpha/\omega)^2 + \{ 3 - (\alpha/\omega)^2 \}^2} \right. \\ \left. \left[-2(\alpha/\omega) \{ 1 + (\alpha/\omega)^2 \} \sin 2\omega t + \{ 3 + 4(\alpha/\omega)^2 + (\alpha/\omega)^4 \} \cos 2\omega t \right] \right\} \quad (27)$$

$$\therefore \text{ここに, } \xi = t / \left\{ 1 - \frac{3}{8} \frac{A^2}{1 + (\alpha/\omega)^2} \frac{PA^0}{EA^3} + \frac{1}{\left\{ 1 + (\alpha/\omega)^2 \right\}^2} \frac{PA^0}{EA^3} \left[\frac{27}{128} \{ 1 + (\alpha/\omega)^2 \} + \frac{3}{4} \frac{1 + 3(\alpha/\omega)^2}{1 + 9(\alpha/\omega)^2} + \frac{3}{256} \{ 1 + 10(\alpha/\omega)^2 - 7(\alpha/\omega)^4 \} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{9}{8} \frac{3 + 11(\alpha/\omega)^2 + 9(\alpha/\omega)^4 + (\alpha/\omega)^6}{16(\alpha/\omega)^2 + \{ 3 - (\alpha/\omega)^2 \}^2} + \frac{9}{16} \{ 1 + 2(\alpha/\omega)^2 \} \right] \right\}$$

なお, 上式から本題の線形解は

$$F(t)/h = \frac{1}{1 + (\alpha/\omega)^2} \frac{PA^0}{EA^3} (e^{-\alpha t} - \cos \omega t + \frac{\alpha}{\omega} \sin \omega t) \quad (28)$$

3. 計算例 図-1において, 開角 $\alpha=\pi/6$, 内外径比 $\mu=0.5850$ (扇形板の中央内弧長と(a-b)の比が1の場合)およびポアソン比 $\nu=0.3$ なる全周固定の扇形板と

対象に, (i), (ii)に示した衝撃荷重による応答と求めれば次のとおりである。

矩形ステップ型衝撃荷重による応答曲線と求めれば図-3に示すようにえられる。図において実線は非線形解を示し, 虚線は線形解を示す。これより, 荷重強度が増大すれば, 応答振幅が増大し, 非線形項の影響が顕著となることばかりわかる。また, 荷重強度が増大すれば, 応答周期が短くなり, 振幅が増加する。

図-4は $\frac{pa^4}{Eh^3}=400$ の場合の指数関数的減衰パルス型衝撃荷重による応答曲線と示している。図において, 衝撃荷重の減衰が線形振動の固有振動数に比べて緩やかな場合($\alpha/\omega=0.5$)には, 応答振幅は荷重の影響を受けやすく, しかも非線形の影響が大きくなる。一方, 衝撃荷重の減衰が急になると, 振動系に及ぼす荷重の影響が小さくなり($\alpha/\omega=1.5$), 当然ながら, 非線形項の影響が小さくなることわかる。

4. 結語 本研究は衝撃荷重を受ける扇形板の過渡応答と振動法を用いて求めたものである。このような解析法は解の全体的な見通しという点には有効であるが, 非線形項の影響が大きくなると誤差が増大してくる。なお, Runge-Kutta-Gill法を用いて, 式(7)と連続数値積分によりえらる解と本法に比較

とを比較すれば, 応答振幅が0.5以下であれば, 十分の精度で両者の解が一致することを確認している。

参考文献

- 1) Thein Wah; Dynamic Response of Beams with Large Amplitudes, Journal of Aerospace Science, Vol. 27 (1960)
- 2) H. M. Berger; A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, J. Appl. Mech., Vol. 22 (1955)
- 3) T. Yamasaki, T. Takahashi; Nonlinear Free Vibrations of Continuous Rectangular Plates, Proc. 19th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1969 (1970)
- 4) T. Yamasaki, T. Takahashi; Nonlinear Vibrations of Ring Sector Plates, Proc. 20th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1970 (本報別冊)
- 5) H. F. Bauer; The Response of A Nonlinear System to Pulse Excitation, Int. J. Nonlinear Mech., Vol. 1 (1966)

