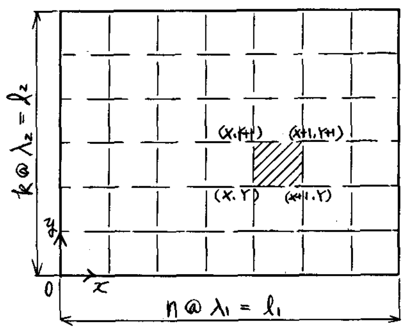
I-70　縦横リブを有する板の固有振動解析について

室蘭工業大学　正員　能町純雄
同　同　松岡健一
同　学生員　大島俊之
同　同　○佐藤博

1、まえがき

リブを有する板の解析法の1方法として、先に要素法の考え方に基ずいて[1] 板を平面要素に分割し、それらの要素間の釣合い関係により、全体の応力を解析する研究がなされたが、ここでは この方法を縦横リブを有する板の固有振動解析に、適用したものである。板の要素は平面応力状態にあるものと仮定し、変位剪断方程式から基本差分方程式を誘導し、フーリェ定和分変換と逆変換を用いて解析したものである。

2、記号と公式



E：弾性係数　(kg/cm²)　　h_{ox}：縦リブの高さ　(cm)
G：剪断弾性係数(kg/cm²)　　h_{oy}：横リブの高さ　(cm)
t：板の厚さ　(cm)　　U^z：縦リブの下側変位　(cm)
t_{ox}：縦リブの厚さ(cm)　　U^0：板の面内変位(x方向)(cm)
t_{oy}：横リブの厚さ(cm)　　V^0：板の面内変位(y方向)(cm)
W：垂直変位(z方向)(cm)　　V^z：横リブの下側変位　(cm)

a)、フーリェ定和分変換公式[2]

$$S_i[\Delta^2 f(x-1)] = -\sin\frac{i\pi}{n}\{(-1)^i f(n) - f(0)\} - D_i S_i[f(x)]$$

$$C_i[\Delta^2 f(x-1)] = \Delta f(n-1)\cdot(-1)^i - \Delta f(0) - D_i\{\tfrac{1}{2}f(n)\cdot(-1)^i + \tfrac{1}{2}f(0) + C_i[f(x)]\}$$

$$S_i[\Delta f(x-1)] = -2\sin\frac{i\pi}{n}\{\tfrac{1}{2}f(n)\cdot(-1)^i + \tfrac{1}{2}f(0) + C_i[f(x)]\}$$

$$C_i[\Delta f(x-1)] = -\{\Delta f(n-1)\cdot(-1)^i + \Delta f(0)\} + (1+\cos\frac{i\pi}{n})\{f(n)\cdot(-1)^i - f(0)\} + 2\sin\frac{i\pi}{n} S_i[f(x)]$$

$$D_i = 2(1-\cos\frac{i\pi}{n}),\quad \Delta^2 f(x-1) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1),\quad \Delta f(x-1) = f(x+1) - f(x-1)$$

3、釣合式の誘導

板の面内荷重はないものとして、板の面内での剪断力の釣合、格点での剪断力の釣合、リブ下側で剪断力が零という条件により変位剪断方程式[3]を適用して次式が得られる。重力加速度 g、単位体積重量 γ、円振動数 p とし 正弦振動を仮定する。

$$\left\{\frac{Et_{ox}h_{ox}}{3\lambda_1} - \frac{Gt_{ox}\lambda_1}{6h_{ox}} + \left(\frac{t_{ox}h_{ox}\lambda_1}{12} + \frac{t_{oy}h_{oy}\lambda_2}{12}\right)X\right\}\Delta_x^2\bar{U}^z_{x-1,y} - \left\{\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}} - \frac{t_{ox}h_{ox}}{2}(\lambda_1+\lambda_2)X\right\}\bar{U}^z_{x,y}$$
$$+\left(\frac{Et_{ox}h_{ox}}{6\lambda_1} + \frac{Gt_{ox}\lambda_1}{6h_{ox}}\right)\Delta_x^2\bar{U}^0_{x-1,y} + \frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}}\bar{U}_{x,y} - \frac{Gt_{ox}\lambda_1}{2}\Delta_x\bar{W}^0_{x-1,y} = 0$$

$$\left\{\frac{Et_{oy}h_{oy}}{3\lambda_2} - \frac{Gt_{oy}\lambda_2}{6h_{oy}} + \left(\frac{t_{oy}h_{oy}\lambda_2}{12} + \frac{t_{ox}h_{ox}\lambda_1}{12}\right)X\right\}\Delta_y^2\bar{V}^z_{x,y-1} - \left\{\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}} - \frac{t_{oy}h_{oy}}{2}(\lambda_1+\lambda_2)X\right\}\bar{V}^z_{x,y}$$
$$+\left(\frac{Et_{oy}h_{oy}}{6\lambda_2} + \frac{Gt_{oy}\lambda_2}{6h_{oy}}\right)\Delta_y^2\bar{V}^0_{x,y-1} + \frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}}\bar{V}^0_{x,y} - \frac{Gt_{oy}\lambda_2}{2}\Delta_y\bar{W}^0_{x,y-1} = 0$$

$$\frac{Gt_{ox}h_{ox}}{\lambda_1}\Delta_x^2\bar{W}^0_{x-1,y} + \frac{Gt_{oy}h_{oy}}{\lambda_2}\Delta_y^2\bar{W}^0_{x,y-1} - \frac{Gt_{ox}}{2}(\Delta_x\bar{U}^0_{x-1,y} - \Delta_x\bar{U}^z_{x-1,y}) - \frac{Gt_{oy}}{2}(\Delta_y\bar{V}^0_{x,y-1} - \Delta_y\bar{V}^z_{x,y-1}) + (t\lambda_1\lambda_2 + t_{ox}h_{ox}\lambda_1 + t_{oy}h_{oy}\lambda_2)X\bar{W}_{x,y} = 0$$

$$\left(\frac{Et\lambda_2}{\lambda_1}+\frac{Et_{ox}h_{ox}}{3\lambda_1}-\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{6h_{ox}}\right)\Delta_x^2\bar{U}^0_{x-1\,y}+\left\{-\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}}-\left(\frac{t_{ox}h_{ox}\lambda_1}{12}+\frac{t_{oy}h_{oy}\lambda_2}{12}+\frac{t\lambda_1\lambda_2}{6}\right)X\right\}\bar{U}^0_{xy}+\left(\frac{Et\lambda_2}{6\lambda_1}+\frac{Gt\lambda_1}{6\lambda_2}\right)\Delta_x^2\Delta_y^2\bar{U}^0_{x-1,y-1}$$
$$+\left(\frac{Et_{ox}h_{ox}}{6\lambda_1}+\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{6h_{ox}}\right)\Delta_x^2\bar{U}^z_{x-1,y}+\frac{Gt\lambda_1}{\lambda_2}\Delta_y^2\bar{U}^0_{x\,y-1}+\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{h_{ox}}\bar{U}^z_{xy}-\frac{Gt\lambda_1}{4}\Delta_x\Delta_y\bar{V}^0_{x-1\,y-1}+\frac{Gt_{ox}\lambda_1}{4}\Delta_x\bar{W}_{x-1\,y}=0$$

$$\left(\frac{Et\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{Et_{oy}h_{oy}}{3\lambda_2}-\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{6h_{oy}}\right)\Delta_y^2\bar{V}^0_{x\,y-1}+\left\{-\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}}-\left(\frac{t_{oy}h_{oy}\lambda_2}{12}+\frac{t_{ox}h_{ox}\lambda_1}{12}+\frac{t\lambda_1\lambda_2}{6}\right)X\right\}\bar{V}^0_{xy}+\left(\frac{Et\lambda_1}{6\lambda_2}+\frac{Gt\lambda_2}{6\lambda_1}\right)\Delta_x^2\Delta_y^2\bar{U}^0_{x-1\,y-1}$$
$$+\left(\frac{Et_{oy}h_{oy}}{6\lambda_2}+\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{6h_{oy}}\right)\Delta_y^2\bar{V}^z_{x\,y-1}+\frac{Gt\lambda_2}{\lambda_1}\Delta_x^2\bar{V}^0_{x-1,y}+\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{h_{oy}}\bar{V}^z_{xy}-\frac{Gt\lambda_2}{4}\Delta_x\Delta_y\bar{U}^0_{x-1\,y-1}+\frac{Gt_{oy}\lambda_2}{4}\Delta_y\bar{W}_{x\,y-1}=0$$

公式(1)～(4)によって上で求めた(5).(6).(7).(8).(9)式に変換を行なう。

$$\bar{U}^*_0=\frac{(-1)^m}{2}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^0_{ny}\sin\frac{i\pi y}{k}+\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^0_{0y}\sin\frac{i\pi y}{k}+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^0_{xy}\cos\frac{m\pi x}{n}\sin\frac{i\pi y}{k}$$
$$\bar{U}^*_z=\frac{(-1)^m}{2}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^z_{ny}\sin\frac{i\pi y}{k}+\frac{1}{2}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^z_{0y}\sin\frac{i\pi y}{k}+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{U}^z_{xy}\cos\frac{m\pi x}{n}\sin\frac{i\pi y}{k}$$
$$\bar{W}^*=\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{W}_{xy}\sin\frac{m\pi x}{n}\sin\frac{i\pi y}{k}$$
$$\bar{V}^*_0=\frac{(-1)^i}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\bar{V}^0_{xk}\sin\frac{m\pi x}{n}+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\bar{V}^0_{x0}\sin\frac{m\pi x}{n}+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{V}^0_{xy}\cos\frac{m\pi x}{n}\sin\frac{i\pi y}{k}$$
$$\bar{V}^*_z=\frac{(-1)^i}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\bar{V}^z_{xk}\sin\frac{m\pi x}{n}+\frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n-1}\bar{V}^z_{x0}\sin\frac{m\pi x}{n}+\sum_{x=1}^{n-1}\sum_{y=1}^{k-1}\bar{V}^z_{xy}\cos\frac{m\pi x}{n}\sin\frac{i\pi y}{k}$$

とおくと、基本差分方程式は次のマトリックスの形にまとめて表示することができる。

$$(\mathbb{K}^*-X\mathbb{E})\{\mathbb{U}^*\}=0$$

ここに
$$\mathbb{K}^*=\begin{vmatrix}K_{11}&K_{12}&K_{13}&K_{14}&K_{15}\\K_{21}&K_{22}&K_{23}&K_{24}&K_{25}\\K_{31}&K_{32}&K_{33}&K_{34}&K_{35}\\K_{41}&K_{42}&K_{43}&K_{44}&K_{45}\\K_{51}&K_{52}&K_{53}&K_{54}&K_{55}\end{vmatrix}\qquad \mathbb{U}^*=\begin{vmatrix}\bar{U}^*_0\\\bar{U}^*_z\\\bar{W}^*\\\bar{V}^*_z\\\bar{V}^*_0\end{vmatrix}\qquad X=\frac{\gamma}{g}p^2$$

$\mathbb{E}$：単位マトリックス

$\{\mathbb{U}^*\}\neq 0$ であるので次の振動数方程式が求まる。 $\mathrm{Det}(\mathbb{K}^*-X\mathbb{E})=0$

また、振動モードは(15)式による $\mathbb{U}^*$ を逆変換して求めることができる。

4、数値計算例

次の数値により、4辺単純支持のリブを有する板について計算した。

$E=2.1\times10^6\ \mathrm{kg/cm^2}$　$G=8.1\times10^5\ \mathrm{kg/cm^2}$

$\gamma=7.85\times10^{-3}\ \mathrm{kg/cm^3}$　$t=0.5\ \mathrm{cm}$　$t_{ox}=t_{oy}=2\ \mathrm{cm}$

$\lambda_1=100\ \mathrm{cm}$　$\lambda_2=50\ \mathrm{cm}$　$h_{ox}=h_{oy}=50\ \mathrm{cm}$

$n=8$　$k=6$

振動周期	1次	0.0098
(sec)	2次	0.0030

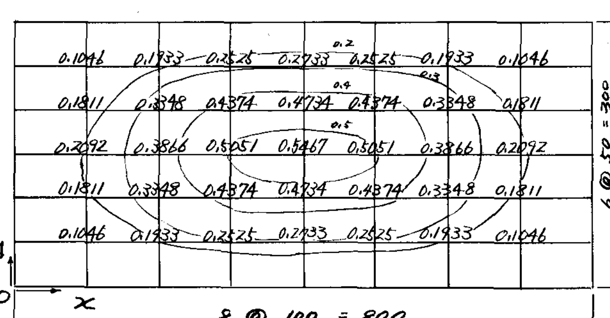


図-2. W （1次振動）〔cm〕

5、参考文献

1). 能町.松岡.大島 ： マトリックス構造解法研究発表論文集 才5回（昭和46年6月）
2). 能町 ： 土木学会北海道支部技術資料 第23号（昭和42年2月）
3). 能町 ： 土木学会論文集 146号（昭和42年6月）