

I-69 3連応力法による平板の固有振動解析について

室蘭工業大学 正員 能町純雄

北見工業大学 正員 ○佐渡公明

1. まえがき

平板の固有振動解析は古くから研究されている。例えば4辺単純支持板では、正規型の振動を行うとして板の振動の微分方程式やLagrangeの方程式より簡単に求められ、4辺固定板では、Rayleigh-Ritzの方法、Weinsteinの方法、Taylorの方法等がある。

ここでは従来の方法と異なり、平板を帯板要素に分割して(Finite Strip Method), $M_r^* = -N \frac{d^2 w}{dy^2}$ と撓み w_r を未知量とし、各境界上での撓角の連続条件式(=これを3連応力式と名付ける)とフレキシビリティとして、せん断力の釣合い式と組合わせて固有振動解析を行うものである。この方法による平板の静的解析は、これ迄室工大・能町研究室で種々なされている。¹⁾ 数値計算例として2, 3の簡単な例を取り挙げ分割数の増大による精度の向上を調べた。

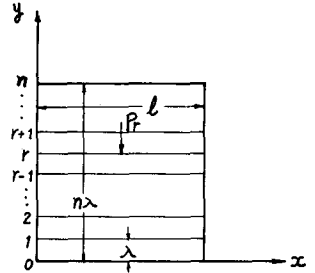


図-1

2. 三連応力式とせん断力の釣合い式

図-1の如く平板を帯板要素に分割して境界 r 上での撓角の連続条件 $\theta_{r,r-1} = \theta_{r,r+1}$ 及び3連応力式は文献¹⁾より

$$\frac{w_{r-1} - 2w_r + w_{r+1}}{\lambda} + \frac{\lambda}{6N} (M_{r-1}^* + 4M_r^* + M_{r+1}^*) = 0 \quad (1)$$

$$M_r^* = -N \frac{d^2 w}{dy^2} \quad N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

境界 r に隣接する両帯板要素のせん断力の釣合い式は¹⁾ (これは x についての2度微分)

$$\frac{M_{r-1}^* - 2M_r^* + M_{r+1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} (\ddot{w}_{r-1} - 2\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) + \frac{\lambda}{6} (\ddot{M}_{r-1}^* + 4\ddot{M}_r^* + \ddot{M}_{r+1}^*) - \frac{\lambda N}{6} (\ddot{w}_{r-1} + 4\ddot{w}_r + \ddot{w}_{r+1}) = -P_r \quad (2)$$

P_r を慣性力 $-\frac{\rho h \lambda}{g} \frac{\partial^2 w_r}{\partial t^2}$ で置き換え、正規型の振動を考えて $w_{r,t} = w_r \sin p t$ $M_{r,t} = M_r \sin p t$ (3)

とくと(2)は $\frac{\Delta^2 M_{r-1}^*}{\lambda} - \frac{N}{\lambda} \Delta^2 \ddot{w}_{r-1} + \frac{\lambda}{6} (\Delta^2 \ddot{M}_{r-1}^* + 6\ddot{M}_r^*) - \frac{\lambda N}{6} (\Delta^2 \ddot{w}_{r-1} + 6\ddot{w}_r) + \frac{\rho h \lambda}{g} p^2 w_r = 0 \quad (4)$

(1), (4)を x 方向に有限フーリエ変換, y 方向にフーリエ変換と変換をして²⁾

$$\frac{1}{\lambda} \left[\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{w}_n - \bar{w}_0 \} + D_i S_i [\bar{w}_{r,m}] \right] + \frac{\lambda}{6N} \left[\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{M}_n^* - \bar{M}_0^* \} + D_i S_i [\bar{M}_{r,m}^*] \right] - \frac{\lambda}{N} S_i [\bar{M}_{n,m}^*] = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \left[\sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{M}_n^* - \bar{M}_0^* \} + D_i S_i [\bar{M}_{r,m}^*] \right] \\ & + \frac{N}{\lambda} \left\{ (-1)^m \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[\Delta^2 \bar{w}_{r-1} \right]_{x=L} + \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[\Delta^2 \bar{w}_{r-1} \right]_{x=0} + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left\{ \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{w}_n - \bar{w}_0 \} + D_i S_i [\bar{w}_{r,m}] \right\} \right\} \\ & - \frac{\lambda}{6} \left\{ (-1)^m \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[(\Delta^2 \bar{M}_{r-1}^* + 6\bar{M}_r^*)_{x=L} \right] + \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[(\Delta^2 \bar{M}_{r-1}^* + 6\bar{M}_r^*)_{x=0} \right] + \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left\{ \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{M}_n^* - \bar{M}_0^* \} + D_i S_i [\bar{M}_{r,m}^*] - 6 S_i [\bar{M}_{n,m}^*] \right\} \right\} \\ & + \frac{\lambda N}{6} \left\{ (-1)^m \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[(\Delta^2 \ddot{w}_{r-1} + 6\ddot{w}_r)_{x=L} \right] + \left(\frac{m\pi}{L} \right) S_i \left[(\Delta^2 \ddot{w}_{r-1} + 6\ddot{w}_r)_{x=0} \right] + (-1)^m \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 S_i \left[(\Delta^2 \bar{w}_{r-1} + 6\bar{w}_r)_{x=L} \right] \right. \\ & \left. - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3 S_i \left[(\Delta^2 \bar{w}_{r-1} + 6\bar{w}_r)_{x=0} \right] - \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 \left\{ \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \bar{w}_n - \bar{w}_0 \} + D_i S_i [\bar{w}_{r,m}] - 6 S_i [\bar{w}_{n,m}] \right\} \right\} - \frac{\rho h \lambda}{g} p^2 S_i [\bar{w}_{r,m}] = 0 \quad (6) \end{aligned}$$

3. 四辺単純支持板の振動数方程式

Boundary Condition $w_0 = w_n = 0$ $w_r|_{x=0} = w_r|_{x=l} = 0$ $M_0^* = M_n^* = 0$ $\ddot{w}_r|_{x=0} = \ddot{w}_r|_{x=l} = 0$ (7)

(7) E (5), (6) に代入すると

$$\left[\begin{array}{cc} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{N}{\lambda} D_i + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda N}{6} (6 - D_i) - \frac{\gamma h \lambda^2}{9} p^2 & \frac{D_i}{\lambda} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{\lambda}{6} (6 - D_i) \\ \frac{D_i}{\lambda} & - \frac{\lambda}{6N} (6 - D_i) \end{array} \right] \begin{Bmatrix} S_i[\ddot{w}_{r,m}] \\ S_i[\ddot{M}_{r,m}^*] \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

この係数MatrixのDeterminant = 0 において Frequency Equation が得られ、円振動数 p は

$$p = \sqrt{\frac{6D_i^2}{\pi^4(6-D_i)\lambda^4} + \left(\frac{m}{l} \right)^2 \frac{2D_i^2}{\pi^2\lambda^2} + \left(\frac{m}{l} \right)^4 \frac{(6-D_i)}{6}} \pi \sqrt{\frac{8N}{\gamma h}} \quad (n\lambda \times l \text{ の長方形板}) \quad (9)$$

4. 相対する2辺が単純支持、他の相対する2辺が固定支持板の振動数方程式

Boundary Condition $w_0 = w_n = 0$ $w_r|_{x=0} = w_r|_{x=l} = 0$ $\ddot{w}_r|_{x=0} = \ddot{w}_r|_{x=l} = 0$ (10)

E (5), (6) に代入して (8) の左辺 = $\left\{ \left(\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \ddot{M}_n^* - \ddot{M}_0^* \}, \frac{\lambda}{6N} \sin \frac{i\pi}{n} \{ (-1)^i \ddot{M}_n^* - \ddot{M}_0^* \} \right\}^T$ (11)

これより $S_i[\ddot{w}_{r,m}]$, $S_i[\ddot{M}_{r,m}^*]$ を求め逆変換により w_r , M_r^* が求まり

最後の境界条件 $\frac{\partial w}{\partial y}|_{y=0} = w_y \lambda + (2\lambda M_0^* + \lambda M_n^*)/6N = 0$ に代入すると結局 Frequency Equation は

$$\frac{\lambda}{3} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\left[\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{6} \left\{ \frac{D_i}{\lambda^2} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{D_i}{3} - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2(6-D_i)}{36} + \frac{\gamma h \lambda^2}{69N} p^2 \right\} \right]}{\left[\left(\frac{D_i}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \frac{D_i(6-D_i)}{3} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4 \frac{\lambda^2(6-D_i)^2}{36} - \frac{\gamma h \lambda^2(6-D_i)}{69N} p^2 \right]} \beta_i \sin^2 \frac{i\pi}{n} = 0 \quad (12)$$

5. 数値計算例

下表に固有振動数の誤差(%)を示す。

(1) 四辺単純支持正方形板

$n \times n$	1/1	1/2	1/3	2/1	2/2	3/1
2	9.54	14.8	16.6	—	—	—
3	4.41	6.99	7.85	8.48	16.3	—
4	2.51	4.01	4.51	4.25	9.54	9.12
6	1.14	1.81	2.03	1.83	4.41	2.49
8	0.640	1.02	1.15	1.03	2.52	1.25
10	0.415	0.656	0.739	0.658	1.63	0.775
12	0.290	0.458	0.514	0.458	1.13	0.530
16	0.175	0.262	0.292	0.258	0.640	0.295
24	0.105	0.116	0.127	0.130	0.299	0.132

振動モードは y 方向の振動次数 / x 方向の振動次数 を示す。

$$\beta_i = \begin{cases} (-1)^i - 1 & \text{for } y \text{ 方向の振動が対称振動} \\ -(-1)^i - 1 & \text{for } y \text{ 方向の振動が逆対称振動} \end{cases}$$

(2) $x=0, l$ で単純支持, $y=0, l$ で固定支持の正方形板

$$l = 2m, h = 4cm, E = 2.1 \times 10^6 kg/cm^2, \gamma = 7.85 \times 10^3 kg/cm^3,$$

$n \times n$	1/1	1/2	2/1	2/2	3/1
2	14.9	17.2	—	—	—
3	5.72	8.75	18.3	21.3	—
4	3.32	5.44	6.43	11.1	20.3
6	1.56	2.68	2.09	5.07	3.82
8	0.902	1.58	1.12	2.98	1.51
10	0.583	1.04	0.713	1.96	0.855
12	0.405	0.731	0.494	1.38	0.568
16	0.224	0.420	0.277	0.792	0.306
24	0.095	0.192	0.122	0.360	0.134

6. 結び 上表より n の増加に伴い固有振動数の誤差が急激に減少して行くのが良く分かる。四辺単純支持正方形板では、振動モード $1/2$ と $2/1$, $1/3$ と $3/1$, $2/3$ と $3/2$, ... に於て固有振動数は等しくなければならないが(縮退), n の増加に伴い等しくなる様子が分かる。又当然 $n = 2$ なら同じ分割数であれば $1/2$ と $2/1$ とは $1/2$ の方が, $1/3$ と $3/1$ とは $1/3$ の方が, ... 精度は良い。四辺固定板では境界条件 $\ddot{w}|_{x=0} = \ddot{w}|_{x=l} = 0$ の扱いが問題であるがこれを今後の課題としたい。

- (参考文献) 1) 帯板を要素とする平板の解法について; 能町・松岡・堀米, 土木学会第24回年次学術講演会講演集 I-44
2) A Note on Finite Fourier Transforms Concerning Finite Integration; S. G. Nomachi, Trans. Mem. MIT Vol. 5 No. 2
3) 工業振動学; S. 志賀 1979 pp. 404~407
4) 軽構造の理論とその応用(上); 林 毅 pp. 425