I-68　固有関数法による矩形板の自由振動解析

信州大学　学生員　○小沢　公共

〃　　正　員　　谷本勉之助

〃　　　〃　　　夏目正太郎

1. はじめに.

この解析は矩形板の自由振動を固有関数法を用いて行なったものである. 固有関数法による矩形板の解析は静的状態に利用されてきたけれども, この考え方を静的な場合と全く同じようにして動的状態にも適用してみたものである. 以下にこの解析の手順を述べることにする.

2. 振動方程式.

矩形板の自由振動方程式は次式により与えられる.

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}=-\frac{\gamma}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{1}$$

こゝにおいて $W(x,y,t)$ はたわみであり, γ は板の単位面積当りの質量を表わし, D は板の剛度を表わすものとする. 今このたわみを $W=w(x,y)\,e^{i\omega t}$ とおき, これを(1)式に代入すると次のようになる.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-p^4 w=0, \tag{2}$$

(2)式を解くと, 一般解は次のように表わされる.

$$w=\lfloor \cos\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \cos\mu\rho,\ \sin\mu\rho \rfloor \mathbb{N}\{ch\kappa\frac{y}{a},\ sh\kappa\frac{y}{a}\}, \tag{3}$$

こゝに, λ, μ, ρ, p はそれぞれ次のようなものである.

$$\lambda=\sqrt{\kappa^2+p^2},\quad \mu=\sqrt{\kappa^2-p^2},\quad \rho=\frac{x}{a},\quad p^2=\sqrt{\frac{\gamma}{D}\omega^2}; \tag{4}$$

ω は円振動数であり, 固有マトリクス $\mathbb{N}_n$ は4行2列の矩形マトリクスである.

3. 第一境界条件.

最初の対向2辺 $x=\pm a$ 即ち $\rho=\pm 1$ 端における任意の境界条件は次のような記号で表わされる.

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}\mathbb{N}_n=0. \tag{5}$$

こゝに, $\mathbb{B}$, $\mathbb{B}'$ はそれぞれ $\rho=1$ 端と $\rho=-1$ 端における境界条件を表わす2行4列の境界マトリクスである. (5)式が成り立つのは(5)式の行列式が零になる時のみ成り立つから, 次のようになる.

$$\det\begin{vmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

もし, $\rho=\pm 1$ 端が固定されているとすると, 境界マトリクスは次のようである.

$$\mathbb{B}=\begin{bmatrix}\cos\lambda, & \sin\lambda, & \cos\mu, & \sin\mu\\ -\lambda\sin\lambda, & \lambda\cos\lambda, & -\mu\sin\mu, & \mu\cos\mu\end{bmatrix}, \tag{7a}$$

$$\mathbb{B}'=\begin{bmatrix}\cos\lambda, & -\sin\lambda, & \cos\mu & -\sin\mu\\ \lambda\sin\lambda, & \lambda\cos\lambda, & \mu\sin\mu, & \mu\cos\mu\end{bmatrix}, \tag{7b}$$

従って, (6)式より対向2辺固定の場合の固有値方程式が次のように得られる.

$$\lambda\sin\lambda\cos\mu-\mu\cos\lambda\sin\mu=0,\qquad \lambda\cos\lambda\sin\mu-\mu\sin\lambda\cos\mu=0. \tag{8}$$

(7a)式は奇数次振動の固有値方程式であり，(7b)式は偶数次振動の固有値方程式を与える．

4．固有マトリクスの実数化．

固有マトリクス$\mathbb{M}_n$の各要素は複素常数であるからこれを実数の常数に変換しておく方が解析上好ましいことから，(5)式は次のようになる．

$$w=\sum_n \lfloor \cos\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \cos\mu\rho,\ \sin\mu\rho \rfloor \mathbb{R}(X)\cdot\lfloor ch\,\chi\tfrac{y}{a},\ sh\,\chi\tfrac{y}{a}\rfloor\, \boldsymbol{i}\,\mathbb{K}_n, \tag{9}$$

これを記号で表わすと次のようになる．

$$w=\sum_n X(x)\cdot\mathbb{Y}(y)\cdot\mathbb{K}_n=\lfloor X(x)\,\mathbb{Y}(y)\rfloor_n\{\mathbb{K}_n\}, \tag{10}$$

5．第二境界条件．

次に，対向2辺$y=\pm b$端における境界条件は次のような形に表わされる．

$$\lfloor [\mathfrak{X}(x)]_n \rfloor\{\mathbb{K}_n\}=0, \tag{11}$$

ゝに $[\mathfrak{X}(x)]_n$ は4行4列の正方マトリクスである．もし，$y=\pm b$端が固定であるとすると，次のようである．

$$[\mathfrak{X}(x)]_n=\begin{bmatrix} X(x)\ \mathbb{Y}(b) \\ X(x)\ \mathbb{Y}'(b) \\ X(x)\ \mathbb{Y}(-b) \\ X(x)\ \mathbb{Y}'(-b) \end{bmatrix}_n; \tag{12}$$

ゝに，プライムは微分を示すものとする．次に(11)式をNeumann級数に展開する必要がある．これは次のように表わすことができる．

$$\sum_m P_m(\rho)\lfloor \mathbb{C}_{mn}\rfloor\{\mathbb{K}_n\}=0, \tag{13}$$

ゝに，$P_m(\rho)$はm次のLegendre多項式であり，$\mathbb{C}_{mn}$はNeumann係数を表わす．

6．最終式．

(13)式より次式が成り立つ．

$$[\mathbb{C}_{mn}]\{\mathbb{K}_n\}=0. \tag{14}$$

マトリクス$[\mathbb{C}_{mn}]$は4N行4N列の正方マトリクスである．(14)式が成り立つためには，係数マトリクスの行列式が零にならねばならない．従って次式を得る．

$$det[\mathbb{C}_{mn}(\chi,p)]=0. \tag{15}$$

7．あとがき．

固有値を求めるにさいし，まずpを仮定して，この仮定値pに対応する固有値K_1，K_2を求め，行列式が零になるp，Kを求めるという方法で行なった．従って最終のpの値が求まれば，実際の円振動数ωが板の物理的性質，γとDの値によりいかなる板のものでも求めることができる．この点にこの解析の利点があるといえる．この解析の中の固有値方程式より固有値K_1，K_2を求める時に，二次元のNewton内挿式を用いてみたが，このNewton内挿式は実に有力な手段となった．

8．参考文献．

1) 小川，谷本，夏目"固有関数法による板の解析"土木学会中部支部研究発表会講演概要集 昭和45年2月20日．

2) "土木学会第25回年次学術講演会講演集第1部" 昭和45年11月