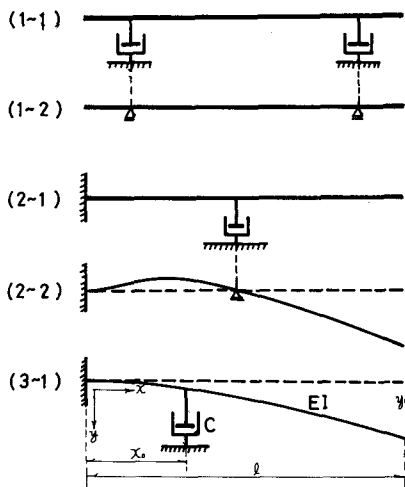


I-67 粘性支点を有する片持梁の振動について

東北大学工学部 正負 倉西 茂

東北工業大学 正負。高橋 龍夫, 正負 松山 正将

まづがき、ここで扱う粘性支点とは次のようなものと云う。図(1-1)に示されるように、梁に集中的に粘性抵抗力を作用させた場合、この粘性抵抗力の作用位置及びその大きさにより、動的には、図(1-2)で示されるように、あたかもこの位置に支点を設けた場合に類似した挙動とすることが考えられ、又これ等の性質は、梁の種類にもよるが、模型によってもたしかめられる。例えば、図(2-1)で示される片持梁に作用している粘性抵抗力を大きくするとこの片持梁は粘性抵抗力の作用している位置に支点を有する連続梁の曲げ振動に類似した振動を行うことがある。今、片持梁の自由端に変位を与え、瞬時、この変位を取り去ると片持梁は減衰振動を行うが、粘性抵抗力のある一定値以上にし、かつその作用位置と適当に選べば(高次の曲げ振動のノード、例えば2次振動のノード以外の位置)と片持梁は図(2-2)に示されるような振動形の曲げ振動に類似した振動をし、粘性抵抗力の増加にともないこの傾向は一層明らかになる。粘性抵抗力の小さい場合には、減衰作用と反発オグンパー^(*)であり、支点という性格は少ない。



本文では、このような粘性支点をもつ梁の曲げ振動の一解析法を、片持梁を例にとり示すものである。粘性支点の持つ特性を明らかにしようとするものである。

運動方程式と解法

図(3-1)に示される片持梁の曲げ振動方程式はディラックのデルタ関数を用いて次のように書ける。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C \frac{\partial y}{\partial x} \delta(x-x_0) = 0, \dots\dots\dots (1)$$

ここで、梁の曲げ剛性 EI は一定とし、粘性抵抗係数を C とする。

(1)式において、 $a^2 = EIg/w$, $n = Cg/w$ とし、初期条件として、図(3-1)に示されるように自由端を y_0 だけ変位させたのを放ち、即ち、 $y(x,0) = y_0 \cdot x^2(3l-x)/2l^2$, $[\frac{\partial y}{\partial t}]_{t=0} = 0$, $[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]_{x=0} = 0$ と与え、 x についてラプラス変換を行うと(2)式を得る。

$$u^2 Y_x - u y_0 \cdot (3l-x)x^2/2l^2 + n [u Y_x - y_0 \cdot (3l-x)x^2/2l^2] \delta(x-x_0) + a^2 \frac{d^4 Y_x}{dx^4} = 0, \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{但し、} \mathcal{L}_x [y(x,t)] = Y_x(x,u)$$

さらに(2)式を次の境界条件のもとに x についてラプラス変換を行うと(3)式を得る。

$$y(0,l) = 0, \quad [\frac{\partial y}{\partial x}]_{x=0} = 0, \quad [\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]_{x=l} = 0, \quad [\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}]_{x=l} = 0, \quad [\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]_{x=0} = \phi_1, \quad [\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}]_{x=0} = \phi_2, \\ \mathcal{L}_x [\phi_1] = \phi_1, \quad \mathcal{L}_x [\phi_2] = \phi_2, \quad [Y_x]_{x=0} = Y_{lx}, \quad \mathcal{L}_x [Y_x] = Y_{lx}(r,u)$$

$$Y_{ix} = \frac{r}{r^4 - \lambda^4} \phi_1 + \frac{1}{r^4 - \lambda^4} \phi_2 - \frac{p\mu}{r^4 - \lambda^4} Y_0 e^{-x/r} + \frac{6k\mu}{a^2} \left\{ \frac{l}{r(r^4 - \lambda^4)} - \frac{1}{r^4(r^4 - \lambda^4)} \right\} + \frac{p\eta_0}{r^4 - \lambda^4} e^{-x/r} \quad \text{----- (3)}$$

但し、 $\eta_0 = \gamma_0(3l-x_0)x_0^2/2l^3$, $u^2 = -a^2\lambda^4$, $pa^2 = \mu$, である。(3)式を逆変換して次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\frac{k_0 x^2}{u} (3l-x) + \frac{1}{2\lambda^3} \left[\lambda \left(\phi_1 - \frac{6k\mu}{u} \right) (\cosh \lambda x - \cos \lambda x) + \left(\phi_2 + \frac{6k\mu}{u} \right) (\sinh \lambda x - \sin \lambda x) \right. \\ & \left. + (p\eta_0 - p\mu Y_{ix_0}) \{ \sinh \lambda (x-x_0) - \sin \lambda (x-x_0) \} \right], \quad \text{----- (4)} \end{aligned}$$

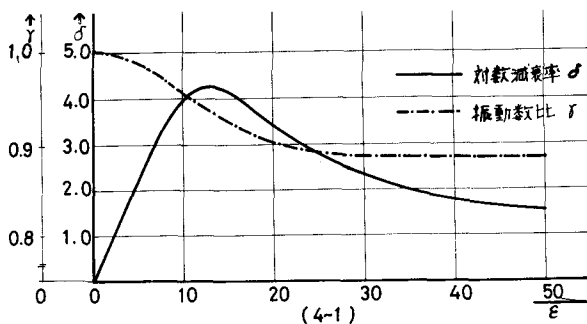
(4)式に先に述べた境界条件の2つを代入して、さらに次式を得る。

$$Y_x = \frac{k}{u} (3lx^2 - x^3) - \frac{6k\mu^3}{u\mu^3} \cdot \frac{1}{D} \left\{ (2\mu A_4 + i\varepsilon \theta_2 A_3) (\xi_1(x) + \frac{i\varepsilon}{2\mu} \theta_1 \xi_0(x)) - (2\mu A_1 + i\varepsilon \theta_1 A_3) (\xi_2(x) + \frac{i\varepsilon}{2\mu} \theta_2 \xi_0(x)) \right\} \quad \text{--- (5)}$$

$$\begin{aligned} D &= 2\mu(A_1 A_5 - A_2 A_4) + i\varepsilon \{ \theta_1(A_3 A_5 - A_2 A_6) + \theta_2(A_1 A_6 - A_3 A_4) \}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad \varepsilon = a\rho l = Cl\sqrt{g/EIw} \\ A_1 &= \cosh \lambda l + \cos \lambda l, \quad A_2 = \sinh \lambda l + \sin \lambda l, \quad A_3 = \sinh \lambda (l-x_0) + \sin \lambda (l-x_0), \quad A_4 = \sinh \lambda l - \sin \lambda l, \\ A_5 &= A_1, \quad A_6 = \cosh \lambda (l-x_0) + \cos \lambda (l-x_0), \quad \theta_1 = \cosh \lambda x_0 - \cos \lambda x_0, \quad \theta_2 = \sinh \lambda x_0 - \sin \lambda x_0, \\ \xi_1(x) &= \cosh \lambda x - \cos \lambda x, \quad \xi_2(x) = \sinh \lambda x - \sin \lambda x, \quad \xi_3(x) = \sinh \lambda (x-x_0) - \sin \lambda (x-x_0), \quad \mu = \lambda l, \end{aligned}$$

(5)式の右辺第1項の逆変換は明らかに、 $\gamma_0(3lx^2 - x^3)/2l^3$ となり初期値である。右辺第2項の逆変換は、右辺第2項と $e^{x/l}$ との積の、 $D=0$ の根に対する留数の和に等しい。この根を $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$ とおけば、片持梁は振動数 $\omega_j = (\alpha_j^2 - \beta_j^2)/\sqrt{EIg/w}$, 対数減衰率 $\delta_j = 4\pi\alpha_j\beta_j/(\alpha_j^2 - \beta_j^2)$ なる粘性減衰振動を行うことになる。一例として粘性抵抗力が固定端より $l/3.0$ に作用する場合に振動性状がどのように変化するかを、振動数および減衰率の変化の状態により示したものが図(4-1)である。

図は、たて軸に振動数比 r , および対数減衰率 δ をとり、よこ軸に $\mu = \lambda l = \varepsilon = Cl\sqrt{g/EIw}$ をとる。 $\varepsilon=0$ は片持梁の2次の曲げ振動であり振動数比はこの2次振動を基準にしている。



明らかに、振動数は粘性抵抗力の増加とともに一定値に近づく。この

一定値は粘性抵抗力の作用位置に支点を設けた連続はり図(2-2), の最低次の振動数に相当している。一方、減衰率は粘性抵抗力の増加とともに一ツのピークを示したのち徐々に減少して行く。 $\varepsilon = Cl\sqrt{g/EIw} > 30.0$ では、振動数にはほとんど変化はみられないが、対数減衰率はかなりの値を示している。これは粘性抵抗力の作用位置(粘性支点)の運動があることを示しており、粘性支点の一つの特徴といえる。 $D=0$ を満足させる根は無数にあり、従って、実際の振動はこれらの根に相当する振動の和であるが今回はこのうちの一つの振動をとりあげ、振動数、減衰率の計算値を示した。また、この解析法は、けり粘性抵抗力が算中央に作用する場合に限らず部分解あるいは分布状に作用する場合にも適用されるがこれは後述に述べる。