I-66　演算子法による梁の合成振動の解析

信州大学　学生員　○有沢一民
正　員　谷本勉之助
正　員　夏目正太郎

1. まえがき

今日までの梁の自由振動解析をそのままコンピューター解析に組むと、モード次数が大きくなるにつれて、誤差集積により望まれる解を得ることが困難になる。　そこで、数値解析の処理の段階において、特別なテクニックを用いて精度のよい解を得た後に、曲げモーメントによるひずみエネルギーの式を用いて、梁の合成振動の解析をおこなう。

2. 基本式と解析

曲げ振動の微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \nu^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

式(1)の解は

$$w(\rho, t) = \lfloor \cos\nu\rho,\ \sin\nu\rho,\ \mathrm{ch}\,\nu\rho,\ \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbb{N} e^{i\omega t}, \tag{2}$$

式(2)より、出発式(State Vector)は

$$\mathbb{W}(\rho, t) = \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\nu}{L} \\ -\frac{EI\nu^2}{L^2} \\ -\frac{EI\nu^3}{L^3} \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \cos\nu\rho, & \sin\nu\rho, & \mathrm{ch}\,\nu\rho, & \mathrm{sh}\,\nu\rho \\ -\sin\nu\rho, & \cos\nu\rho, & \mathrm{sh}\,\nu\rho, & \mathrm{ch}\,\nu\rho \\ -\cos\nu\rho, & -\sin\nu\rho, & \mathrm{ch}\,\nu\rho, & \mathrm{sh}\,\nu\rho \\ \sin\nu\rho, & -\cos\nu\rho, & \mathrm{sh}\,\nu\rho, & \mathrm{ch}\,\nu\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{i\omega t}. \tag{3}$$

構造体系を形成する境界方程式より、最終方程式に導びき、次の固有値方程式が得られ、各モードの固有値を得ることができる。

$$\begin{vmatrix} \mathbb{B} \\ \mathbb{B}' \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

梁の全スパンにおける曲げモーメントによるひずみエネルギー $\mathbb{W}$ は

$$\mathbb{W} = \int_0^1 \frac{M^2(\rho)}{2EI} L\, d\rho, \tag{5}$$

式(5)において

$$M(\rho)=M_1(\rho)+M_2(\rho)+M_3(\rho)+\cdots=\sum_i M_i(\rho), \tag{6}$$

ただし、$M_i(\rho)$はi番目のモードの曲げモーメントを表わしている。 モード i における$M_i(\rho)$は

$$M_i(\rho)=\lfloor \cos\nu\rho,\ \sin\nu\rho,\ \mathrm{ch}\,\nu\rho,\ \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor_i \mathfrak{f}(\nu_i) K_i. \tag{7}$$

式(5),(6),(7)より

$$\{K_2,\ K_3,\ K_4,\cdots,\ K_n\}=\{C_2,\ C_3,\ C_4,\cdots,C_n\}K_1. \tag{8}$$

3. 結果.

求めるState Vectorの成分は次式のようになる

$$\mathbb{W}_i(\rho)=[\mathbb{C}\,\mathbb{D}\,\mathbb{R}(\rho)\mathfrak{f}(\nu)]_i K_1, \tag{9}$$

よって、合成振動のState Vectorは式(9)より

$$\mathbb{W}(\rho)=\sum_i \mathbb{W}_i(\rho). \tag{10}$$

4. 計算例.

両端埋込みの梁における最初のいくつかの固有値 ν を示す.

$\nu_1=2.365020372$, $\nu_2=3.926602311$, $\nu_3=5.497803918$,

$\nu_4=7.068582745$, $\nu_5=8.639379828$, $\nu_6=10.21017612$.

5. まとめ.

計算例として、固有値だけしか示すことができないが、固有値だけをとっても、その値は、従来の方法をそのまま使った時の半分の値でよい。 これは、より高次のモードになった時、有効性をはっきりすることがわかる。 系の正しさを証明すると、各次数における相対変形量等が対称にみることができる。