I-65　走行荷重による異方性半無限体の応力分布について

京都大学　正員　丹羽義次　正員　小林昭一　学生員　○福井卓雄

異方性半無限体上を定常速度で移動する荷重により生ずる応力分布ならびに変形を求める。このような問題は耐震構造物の設計において重要であり，また，異方性固体中の波動伝播の研究において基本的なものである。ここでは異方性の対称面と荷重走行面が一致する場合のみを考え，平面ひずみを仮定する。等方性固体中の弾性波と同じように縦波および横波に相当するものが生ずるが，それらの伝播の速度は波の伝わる方向によって変化し一定ではない。また，等方性固体に対する問題の場合と同じく，荷重の移動速度により条件の異なる三つの場合に分けられる。これは荷重の走行方向に対する弾性定数もしくはその方向の波の伝播速度と密接な関係をもっている。

(i) 荷重の移動速度がその方向の縦波および横波の速度よりも小さい場合。（亜音速）

(ii) 移動速度が二つの波の速度の中間の値である場合。（遷音速）

(iii) 移動速度がどちらの波の速度よりも大きい場合。（超音速）

超音速の場合はT.R.Rogge[2]によってLaplace変換を用いて解かれている。ここではFourier変換を用いて解く。形式的には，これら三つの場合についてまったく同一の手順を用いることができる。最終的に，無限遠での放射の条件および，符号を考慮することによりすべての場合について解を求めることができる。

平面ひずみのもとで，運動方程式は[1]

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}+c\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\qquad c\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+d\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\qquad(1)$$

ここに，a,b,c,dは弾性定数で，例えば直交異方性固体の場合には　$a=c_{11}$，$b=c_{13}+c_{55}$，$d=c_{33}$，$c=c_{55}$　である。これらの弾性定数は弾性エネルギーの正値性および縦波が横波の速度よりも大きくなるという条件から導かれる次の不等式を満足しなければならない。

$$ad-(b-c)^2>0,\quad (a-c)d-b^2>0,\quad a>c,\quad d>c,\quad c>0\qquad(2)$$

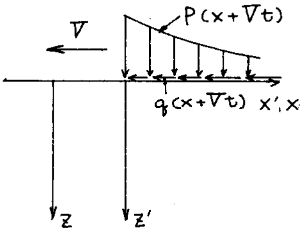
このときの応力は

$$\sigma_{zz}=d\frac{\partial w}{\partial z}+(b-c)\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_{xx}=a\frac{\partial u}{\partial x}+(b-c)\frac{\partial w}{\partial z},\quad \sigma_{xz}=c\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\qquad(3)$$

境界条件は　$z=0$　において

$$\sigma_{zz}=p(x+Vt),\quad \sigma_{xz}=q(x+Vt)\qquad(4)$$

$x\to\pm\infty$　のとき　$\{u,w;\ \sigma_{xx},\sigma_{zz},\sigma_{xz}\}\to O(1/x^2)$



荷重は一定の速度で長時間移動しており，移動速度Vと同じ速度で移動する座標系（x', z'）に関して応答が定常であると仮定する。

Galilei変換　$x'=x+Vt$，$z'=z$，$t'=t$　を導入すると，運動方程式(1)は

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2}+b\frac{\partial^2 w}{\partial x'\partial z'}+c\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2},\qquad c\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x'\partial z'}+d\frac{\partial^2 w}{\partial z'^2}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial x'^2}\qquad(5)$$

境界条件(4)は, $z'=0$ において, $\sigma_{zz} = p(x')$, $\sigma_{xz} = q(x')$ (6)

$\bar{u}(\xi, z')$ を $u(x', z')$ の Fourier 変換とする。

$$\bar{u}(\xi, z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x', z') e^{-i\xi x'} dx' \text{, この逆変換は } u(x', z') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\xi, z') e^{i\xi x'} d\xi \quad (7)$$

(5)をFourier変換し, 境界条件 $\lim_{x'\to\pm\infty}\underbrace{[u, w, \partial u/\partial x', \partial w/\partial z']}_{=O(1/x'^2)}$ を考えれば,

$$[cD^2 - (a-\rho V^2)\xi^2]\bar{u} + ib\xi D\bar{w} = 0, \qquad ib\xi D\bar{u} + [dD^2 - (c-\rho V^2)\xi^2]\bar{w} = 0 \quad (8)$$

ここに $D = \partial/\partial z'$ である。解を次のように仮定する。

$$\bar{u} = A(\xi) e^{\lambda|\xi|z'}, \qquad \bar{w} = B(\xi) e^{\lambda|\xi|z'} \quad (9)$$

(9)を(8)に代入して,

$$\begin{cases} [c\lambda^2 - (a-\rho V^2)]\xi^2 A(\xi) + ib\lambda\xi|\xi| B(\xi) = 0 \\ ib\lambda\xi|\xi| A(\xi) + [d\lambda^2 - (c-\rho V^2)]\xi^2 B(\xi) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$A(\xi)$, $B(\xi)$ が有意義な値を持つためには, これらに関する係数の行列式は0でなければならない。従って λ を決定するための4次方程式を得る。

$$cd\lambda^4 - [d(a-\rho V^2) + c(c-\rho V^2) - b^2]\lambda^2 + (a-\rho V^2)(c-\rho V^2) = 0 \quad (11)$$

$B(\xi)/A(\xi) = \beta = (\xi/|\xi|)\beta'$ と, λ の4つの根に対応して β' が決まる。

$$\beta' = i[c\lambda^2 - (a-\rho V^2)]/b\lambda \quad (12)$$

結局, $\bar{u}$, $\bar{w}$ は次のように表わされる。

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{4} A_j(\xi) e^{\lambda_j|\xi|z'}, \qquad \bar{w} = \sum_{j=1}^{4} \frac{\xi}{|\xi|}\beta'_j A_j(\xi) e^{\lambda_j|\xi|z'} \quad (13)$$

V の大きさにより, 解は三つの場合に分類される。

(i) 亜音速の場合 $V < \sqrt{c/\rho}$ このとき λ はすべて実根である。

(ii) 遷音速の場合 $\sqrt{c/\rho} < V < \sqrt{a/\rho}$ λ は二つの実根と二つの純虚根である。

(iii) 超音速の場合 $V > \sqrt{a/\rho}$ λ はすべて純虚根である。

たとえば, (i)の場合の係数 $A_j(\xi)$ は次のようにして決定される。λ の根として, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = -\lambda_1$, $\lambda_4 = -\lambda_2$ をとる。$\beta'_3 = -\beta'_1$, $\beta'_4 = -\beta'_2$。このとき, $z' \to \infty$ で $\bar{u}$, $\bar{w}$ が発散しないためには $A_1(\xi) = A_2(\xi) = 0$。境界条件(6)をFourier変換したものに(13)を代入して

$$\begin{bmatrix} [d\lambda_1\beta'_1 + i(b-c)]\xi & [d\lambda_2\beta'_2 + i(b-c)]\xi \\ -(\lambda_1 + i\beta'_1)|\xi| & -(\lambda_2 + i\beta'_2)|\xi| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3(\xi) \\ A_4(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}(\xi) \\ \bar{q}(\xi) \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここに, $\bar{p}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} p(x') e^{-i\xi x'} dx'$, $\bar{q}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} q(x') e^{-i\xi x'} dx'$

(14)を解いて,

$$\begin{aligned} A_3(\xi) &= \frac{-1}{K}\{\bar{p}(\xi)(\lambda_2 - i\beta'_2)|\xi| + \bar{q}(\xi)[d\lambda_2\beta'_1 + i(b-c)]\xi\} \\ A_4(\xi) &= \frac{1}{K}\{\bar{p}(\xi)(\lambda_1 + i\beta'_1)|\xi| + \bar{q}(\xi)[d\lambda_1\beta'_1 + i(b-c)]\xi\} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに, K は(14)の係数行列式である。結局, (12), (11), (15)を(13)に入れて $\bar{u}$, $\bar{w}$ が決定され, $(7)_2$ により, u, w が求まる。応力は(3)により決定される。

(ii), (iii)の場合には, さらに無限遠における放射の条件を考えることにより, 解を得ることができる。

なお, 計算結果は当日発表する。

[参考文献] (1) R. Scott & J. Miklowitz: Trans. of ASME, March (1967), pp. 104~110. (2) T. Rogge: ZAMP, vol. 19 (1968) pp. 761~770.