

I-63 応力波伝播の機構について

東北大学工学部 正員 多谷虎男
東北工業大学工学部 正員 ○秋田 宏

近年、構造物の動的解析に関連して、応力波の研究も盛んに行なわれている。応力波に関する研究の歴史は古く、その基本的な性質、解析的な解法については大部分明らかになった様に思われる。著者は *longitudinal wave* の応力分布を調べたところ、無限板中の波に対しては、すでに Lamb が 1917 年に解を求めているにもかかわらず、応力分布について詳しく示している文献を見つけることができなかったため、若干の計算を行って応力分布を図示してみた。又、*dilatation* や *rigid body rotation* の分布、変位の分布も合わせて求めてみた。

無限板の厚さ $2H$ として、図-1 のように座標をとる。

ポテンシャル函数 φ , ψ を

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

で定義すれば、これらは

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

を満足しなければならない。

x 方向の進行波で、境界条件

$$\sigma_z = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0$$

を満たしうる解は、Lamb により

$$\varphi = (A \sinh \nu z + B \cosh \nu z) e^{i(\omega t - Kx)}$$

$$\psi = (C \sinh \nu' z + D \cosh \nu' z) e^{i(\omega t - Kx)}$$

が求められている。

実際には、*longitudinal wave* のみを扱ったこと、 ν' が 0 の時は函数形が少しく異ってくること、 ν' が虚数のときの混乱をさけるため、次の 3 つの場合について、以下の様な函数形を用いた。

u, w : x, z 方向の変位

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

α : dilatational velocity

β : distortional velocity

t : 時間

σ_z, τ_{zx} : 応力成分

λ, μ : Lamé の定数

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{dilatation}$$

A, B, C, D : 境界条件より定まる定数

$$\nu = \sqrt{K^2 - K_\alpha^2}$$

$$\nu' = \sqrt{K^2 - K_\beta^2}$$

$$K_\alpha = \frac{\omega}{\alpha}$$

$$K_\beta = \frac{\omega}{\beta}$$

ω : 角振動数

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Λ : 波長

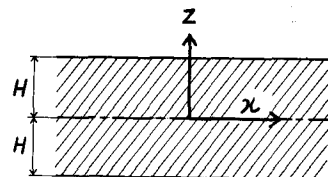


図-1. 座標のとり方

$\Lambda = H$ のとき

$$\varphi = B \cosh \nu z \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad \psi = C \sinh \nu z \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

$\Lambda = 1.85H$ ($\nu = 0$) のとき

$$\varphi = B \cosh \nu z \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad \psi = C z \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

$\Lambda = 10H$ のとき

$$\varphi = B \cosh \nu z \cdot e^{i(\omega t - kx)}, \quad \psi = C \sinh \nu z \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

以上より u , w , σ_z および

$$\sigma_x = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$2\omega y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}$$

の z に関する分布を, steel の場合について (ヤング率 $= 2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, ポアソン比 $= 0.29$) 計算したものが, 図-2 から図-10 である。

図-11 から図-13 には比較のため, Davies, R.M. による, Rayleigh 波および Pochhammer の解の, 応力と変位の分布を示した。 $\Lambda = H$ のときは, 変位, 応力とも Rayleigh 波と良く似た分布をしていることが分る。この点は Pochhammer の解でも同じことで良く知られた事柄である。

$\Lambda = 1.85H$ から $\Lambda = 10H$ への変化は, 簡単には類推できないものがある。図-12 から図-13 への変化も同様であって, Davies は, 棒の表面での縦変位 u_{xa} が 0 になる波長として $a/\lambda = 0.375$ を求めているが, この点に因しては改めて考察してみたい。

図-5 の様な応力の分布は, 一種の応力集中と考えられる。この様な応力と破壊との関係も興味ある事柄である。

以上の問題点を含めた, 極く基本的なものに因して, 当日発表の予定である。

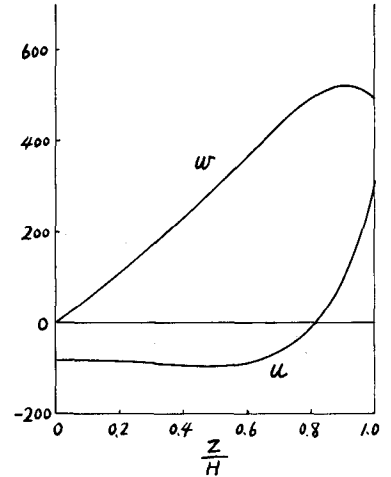


図-2 u, w ($\Lambda = H$)

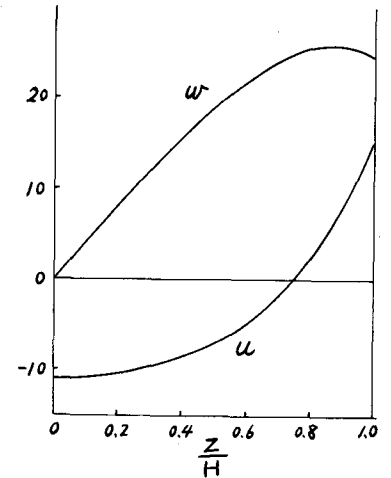


図-3 u, w ($\Lambda = 1.85H$)

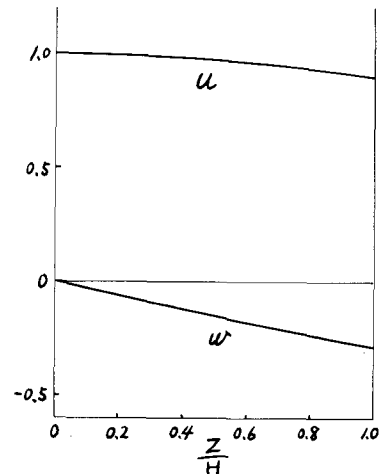


図-4 u, w ($\Lambda = 10H$)

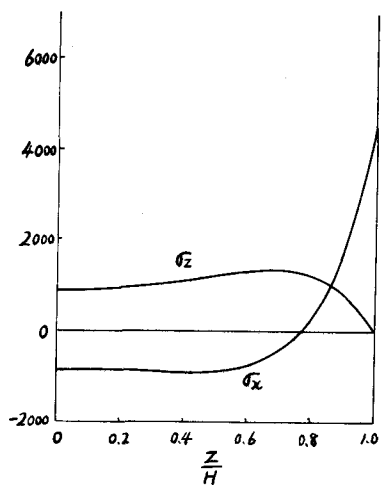


图-5 $\sigma_x, \sigma_z (\lambda = H)$

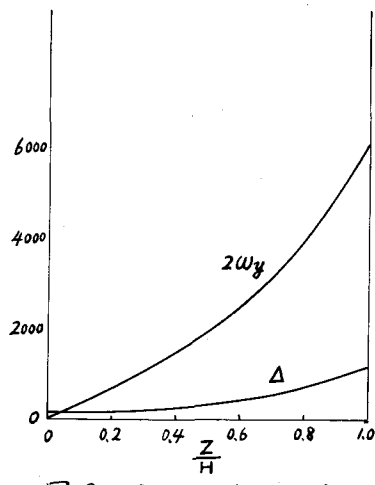


图-8 $\Delta, 2\omega_y (\lambda = H)$

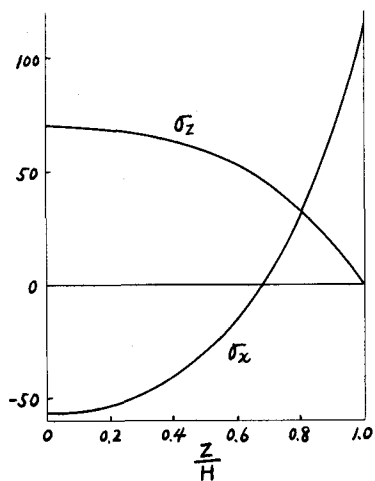


图-6 $\sigma_x, \sigma_z (\lambda = 1.85 H)$

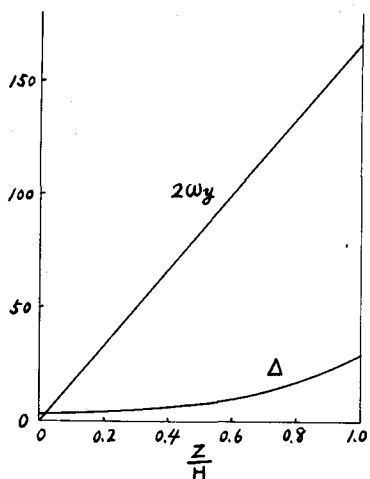


图-9 $\Delta, 2\omega_y (\lambda = 1.85 H)$

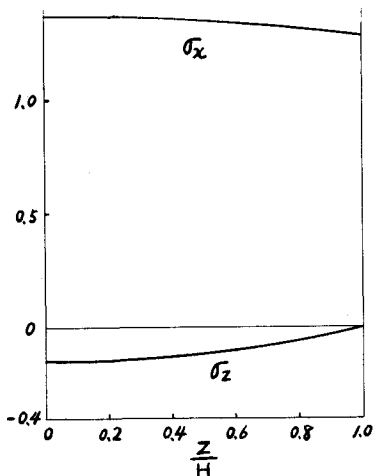


图-7 $\sigma_x, \sigma_z (\lambda = 10 H)$

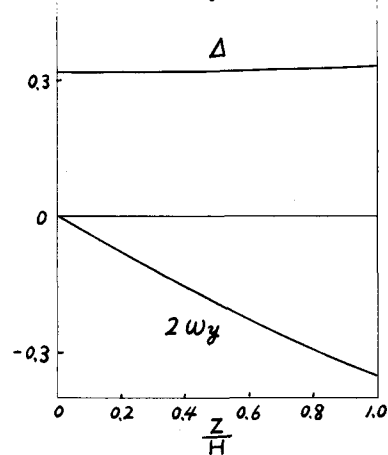


图-10 $\Delta, 2\omega_y (\lambda = 10 H)$

参考文献

H. Kolsky Stress Waves in Solids Dover 1963

W.M. Ewing etc. Elastic Waves in Layered Media
Mc Graw-Hill 1957

R.M. Davies On a Critical Study of the Hopkinson
Pressure Bar
Phil. Trans. Roy. Soc. 240. A. 1948

H.N. Abramson Stress Wave Propagation in Rod and
Beams
Advances in Applied Mechanics 1958

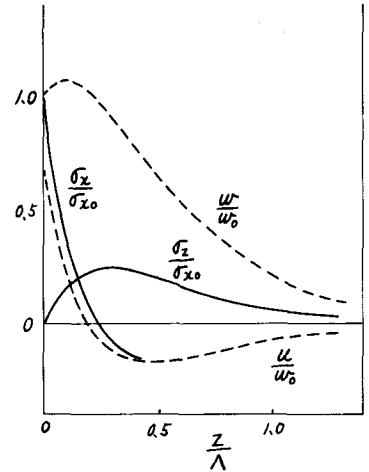


図-11. Rayleigh 波における
変位, 応力の分布 (Davies 氏)

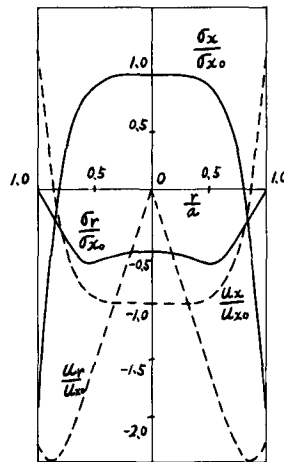


図-12. Pochhammer の解に
おける変位, 応力の分布 (Davies 氏)
 $\frac{a}{\lambda} = 0.935$

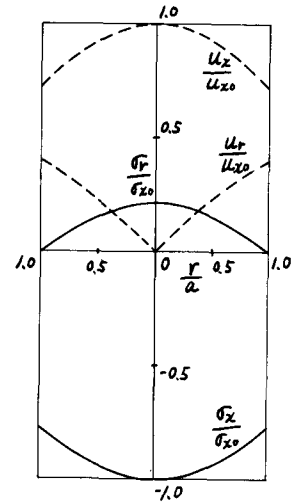


図-13. Pochhammer の解に
おける変位, 応力の分布 (Davies 氏)
 $\frac{a}{\lambda} = 0.196$