

1. まえがき

著者は先に、地盤上の板に線荷重が周期的に作用する場合の板の波動伝播を論じたが、ひきつづき本論文は、地中に線波源がある場合の板の波動伝播機構を同様の手法を用いて解明したものである。

2. 解法

図-1において、板が地盤より受ける反力を $R(x, t)$ とし、板と地盤との連続条件として次式を考える。

$$[\hat{v}_x]_{x=0} + R(x, t) = 0, \quad [\tau_{xx}]_{x=0} = 0, \quad [w]_{x=0} = \bar{w}_p \quad (1-1, 2, 3)$$

ここで $\bar{w}_p = w_p e^{i\omega t}$: 板のたわみ, τ_{xx} , $\hat{v}_x$: 地盤の応力
しかるとき、板の振動は次のように表わせる。

$$2\bar{w}_p / \lambda^2 + \bar{w}_p / \lambda \cdot \partial \bar{w}_p / \partial x^2 = -R(x, t) / D \quad (2)$$

次に図-1の系と次の2つの系を重ね合わせと考える。すなわち、

① 図-2に示すように、無限弾性体において2点C, C'に同一の波源がある系と考え、X軸における応力 $\hat{v}_{x1}$, τ_{xx1} , および変位 w_1 を求め結果のみを示せば次式で表わされる。

(第1系)

$$\begin{cases} [\hat{v}_x]_{x=0} = (-2G) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu f} (2k^2 - k_0^2) e^{-ikx} / D \, dk e^{i\omega t} \equiv A(k) e^{-ikx} e^{i\omega t} \\ [\tau_{xx1}]_{x=0} = 0, \quad [w_1]_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

② 図-3に示すように、半無限弾性体の表面(X軸)に外力 $P(x, t) = -\hat{v}_{x1} - R(x, t)$ が作用する系を考える。この系の解は、ここで結果のみを示せば、次のようになる。

(第2系)

$$[w_2]_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \nu k_0^2 Z(k) / \{G F(k)\} e^{-ikx} dk e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$\text{ここに } P(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(k) e^{-ikx} dk e^{i\omega t} \quad (5)$$

$$R(x, t) = R(x) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(k) e^{-ikx} dk e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$Z(k) = -(A(k) + X(k)) \quad (7)$$

しかるとき、与えられた系(図-1)の解は第1と第2系の和で与えられ、 $[w]_{x=0}$ は次式で表わされる。

$$[w]_{x=0} = [w]_{x=0} + [w_2]_{x=0} \equiv [w_3]_{x=0} \quad (8)$$

ここで連続条件のうち、残された式(1-3)と式(9)および式(3)より、未知関数 $X(k)$ が次のように求まる。

$$X(k) = \{ \nu k_0^2 (k^2 - \beta H \omega^2 / D) A(k) / \{ G F(k) \} / D - \nu k_0^2 (k^2 - \beta H \omega^2 / D) / G F(k) \} \quad (9)$$

式(9)と式(7)に代入すると、式(8)の値を求めれば結局、板のたわみ w_p が次のように求まる。

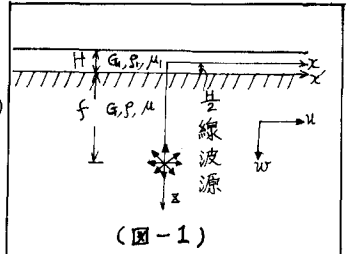
$$w_p = (-2G/D) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\nu f} k_0^2 (2k^2 - k_0^2) e^{-ikx} / G(k) dk \quad (10)$$

ただし $G(k) = \nu k_0^2 k^2 - \beta H \omega^2 \nu k_0^2 / D - G F(k) / D$

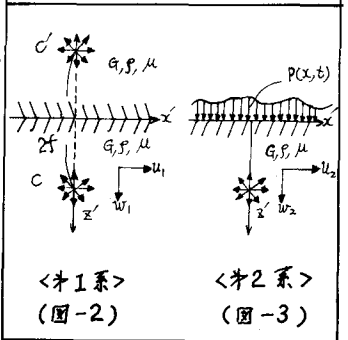
3. 数値計算および考察

式(10)を無次元化すれば、次のようになる。

$$w_p = \{ (-2) k_0 G / D \} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k_0^2 \varphi} (2\varphi^2 - 1) e^{-ik_0 x \varphi} / G(\varphi) d\varphi \equiv (-2 k_0 G / D) \int_{-\infty}^{+\infty} J(\varphi) d\varphi \quad (11)$$



(図-1)



<第1系>

(図-2)

<第2系>

(図-3)

ただし

$$\begin{aligned} \nu &= (k^2 - k_0^2)^{1/2} & d &= \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho} \\ \nu' &= (k^2 - k_0^2)^{1/2} & \beta &= \sqrt{G / \rho} \\ k_0 &= \omega / d & \lambda, G &: \text{Lame 定数} \\ k_0 &= \omega / \beta & F(k) &= (2k^2 - k_0^2)^2 - 4k^2 \nu \nu' \end{aligned}$$

$$\text{ただし } G(\rho) = \nu \varepsilon^2 \rho^2 - 6 \frac{\bar{\gamma}}{\varepsilon} (1 - \mu_1) \varepsilon \nu - 6 \frac{1 - \mu_1}{\varepsilon} R(\rho)$$

$$R(\rho) = (2\rho^2 - 1)^2 - 4\nu \nu' \rho^2$$

$$\rho = k/k_0, \quad \gamma = k_0/k_0, \quad \varepsilon = H/k_0 = H\omega\sqrt{\mu}/G, \quad g = G_1/G, \quad \bar{\gamma} = \gamma_1/\gamma, \quad D = G(1 + \mu_1)H^2/6(1 - \mu_1^2)$$

i) 積分方法

式(11)の被積分周数は、たとえば表-1に示すように極を有している。(極は実根と複素根とをわけて、 χ, ε の或る値に対しては実根 s_3 が存在しなくなる場合がある。)この周数を直接積分、あるいは数値積分することは困難であり、ここでは文献りと同様、図-4に示すような複素積分を行ない、結果のみを記せば(12)式となる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} J(s) ds = (-2\pi i) \sum \text{Res} + \int_{L_1} J(s) ds + \int_{L_2} J(\rho) d\rho \quad (12)$$

ii) 留数

$$\text{Res}[J(s); s_1] = e^{-k_0 \gamma x} A_1(s_1) e^{-i k_0 s x}$$

$$\text{Res}[J(s); s_2] = e^{-k_0 \gamma x} \overline{A_1(s_2)} e^{-i k_0 s x}$$

$$\text{Res}[J(s); s_3] = B_1(k) e^{-i k_0 k x} \quad (13)$$

(表-1)

$\rho = 1.8\% \omega \quad \mu = 1/4$			$S_1 = \bar{s} + i\eta$	$\chi = \frac{E_1}{E}$
$\rho_1 = 2.3\% \omega \quad \mu_1 = 1/6$			$S_2 = -\bar{S}_1$	
			$S_3 = K$	
χ	ε	K	$\bar{s}$	η
10	0.1	1.12469	4.22260	-7.41945
	0.2	1.13592	2.04614	-3.75222
	0.3	1.14972	1.30087	-2.55386
	0.4	1.14745	0.92277	-1.97307
	0.5	1.12999	0.69780	-1.63583
	0.6	1.10331	0.55163	-1.41647
	0.7	1.07350	0.45060	-1.26193
	0.8	1.04488	0.37735	-1.14662
	0.9	1.02057	0.32218	-1.05687
	1.0	1.00392	0.27933	-0.98470
500	0.1	1.08401	1.09440	-2.10141
	0.2	1.01389	0.51333	-1.16035
	0.3		0.33304	-0.84760
	0.4		0.24617	-0.68550
	0.5		0.19447	-0.58439
	0.6		0.15986	-0.51462
	0.7		0.13493	-0.46328
	0.8		0.11608	-0.42377
	0.9		0.10131	-0.39234
	1.0		0.08946	-0.36668

iii) Branch line integral

この積分を厳密に行なうことは困難なので、 x が大きな所で近似式を求める。²⁾

$$\int_{L_1} = C(x k_0)^{-3/2} e^{-i k_0 x} \quad (14)$$

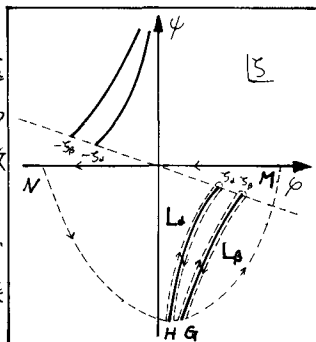
$$\int_{L_2} = D(x k_0)^{-3/2} e^{-i k_0 x}$$

ただし C, D は定数である。

以上、式(12)(13)および(14)より、極ったわみの伝播機構は次式にて表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{w}_p &= w_p e^{i\omega t} \\ &= 2S \frac{E}{H} (2\pi i) B_1 \exp[i\omega(t - \frac{k}{\beta} x)] \\ &\quad + 2S \frac{E}{H} (2\pi i) [A_1 \exp[i\omega(t + \frac{\gamma}{\beta} x)] - \bar{A}_1 \exp[i\omega(t - \frac{\gamma}{\beta} x)]] e^{-k_0 \gamma x} \\ &\quad - 2S \frac{E}{H} [C(x k_0)^{-3/2} \exp[i\omega(t - \frac{\gamma}{\beta} x)] + D(x k_0)^{-3/2} \exp[i\omega(t - \frac{\gamma}{\beta} x)]] \quad (15) \end{aligned}$$

式(15)の第1項は Rayleigh波に相当するもので、 x に無関係な一定の振巾を有し、かつ表-1に示すごとき k に対応して β/k の速さで荷重点から遠ざかって伝播する表面波を表わす。ただし前述のような実根 s_3 がない場合には、この表面波は存在しない。第2項は x が増大するにつれて指数関数的に減少する振巾をもち、かつ互いに反対方向に同一の速度 β/γ で伝播する、いわゆる定在波を表わしている。第3項は半無限弾性体における縦波と横波の伝播速度 α および β に等しい伝播速度をもつ体波を表わしており、 x が大きい所では、それぞれ $(x k_0)^{-3/2}$ および $(x k_0)^{-3/2}$ の割合で減少する振巾を有していることなどが明白となった。



(図-4)

- 1) 山崎徳也, 横田漢; 『周期荷重と受ける弾性地盤上の板の波動解析』土木学会第25回年次学術講演集(1970年11月)
- 2) W.M. Ewing, W.S. Jandtzyky and F. Press; 『Elastic Waves in Layered Media』McGraw-Hill. Book co. 1957