

I-57 衝撃荷重を受ける円弧アーチの弾性応答

防衛大学校土木工学教室 正員 岡元北海

〃 〃 正員 石川信隆

〃 〃 学生員 山下重幸

1. まえがき 近年、衝撃荷重を受ける梁の応答に関する研究が活発となってきたが、いまだアーチを対象とする研究は数少く、わずかにM.M.Chenらの曲り梁を剛塑性体と見做して解析したものおよびE.Wenke²⁾の弾性支持リングを取り扱ったものが見当るに過ぎない。本研究は、アーチ構造物に衝撃荷重が作用する場合の応答を究明するため、その基礎的段階としてSt.Venant³⁾が梁で用いた手法をアーチに応用拡張せんと試みにものである。すなわち、衝撃を与える物体がアーチに附着して振動するものと仮定し、かつアーチの衝撃点に初速度を与えることにより、衝撃時のたわみを近似的に算定する手法を確立した。ついで2ヒンジおよび固定アーチの振動性状を数値計算により考察するとともに、さらに2ヒンジ円弧アーチを対象とする模型実験により本理論の妥当性を検討した。

2. 理論解析および数値計算

(1) 基礎微分方程式および一般解

理論解析に当っては次の仮定を用いる。(i)アーチの軸線の伸縮は考慮しない。(ii)衝撃点の局部変形は考慮しない。(iii)衝撃を与える物体は、衝撃を与えた後アーチに附着して振動するものとする。以上の仮定に基づいて図-1のごとき円弧アーチの自由振動の方程式を導けば、半径方向変位 u について次のごとき6階偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\gamma A R^4}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u \right) = 0 \quad \cdots (1)$$

ただし、

A : 断面積, γ : 単位重量, R : 曲率半径

式(1)の一般解を求めれば次式のごとくなる。

$$u(\theta, t) = \sum_{j=1}^n U_{ji}(\theta) (E_{ji} \sin p_{ji} t + F_{ji} \cos p_{ji} t) \quad \cdots (2)$$

ここに、 $U_{ji}(\theta) = \sum_{i=1}^3 (C_{j,i} \sin n_{j,i} \theta + D_{j,i} \cos n_{j,i} \theta)$

n_{ji} ($j=1, 2, 3$) は正数で、 n_{ji}^2 は $n^6 - 2n^4 + (1 - k^2)n^2 - k^2 = 0$

の3実根であり、 $k^2 = a^2 R^4 p^2$, $a^2 = \gamma A / gEI$, p : 円振動数である。

また、接線方向変位 w の一般解は仮定(i)より $u = \partial w / \partial \theta$ となるゆえ、次式のごとく表わされる。

$$w(\theta, t) = \sum_{j=1}^n W_{ji}(\theta) (E_{ji} \sin p_{ji} t + F_{ji} \cos p_{ji} t) \quad \cdots (3)$$

ただし、 $W_{ji}(\theta) = \sum_{i=1}^3 \left(-\frac{C_{j,i}}{n_{j,i}} \cos n_{j,i} \theta + \frac{D_{j,i}}{n_{j,i}} \sin n_{j,i} \theta \right)$

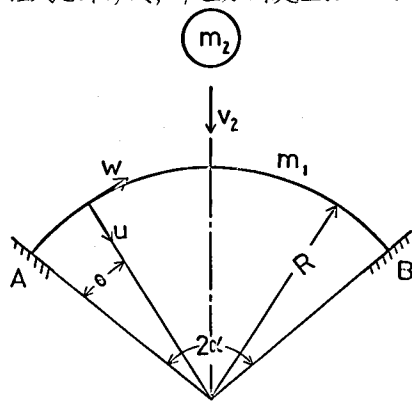


図-1

(2) 衝撃荷重を受ける2ヒンジアーチの応答

いま図-1のごとき2ヒンジアーチの中央点に、質量 m_2 の物体が質量 m_1 のアーチに速度 v_2 で垂直に衝突して、アーチに衝撃を与える場合を考える。このときの境界条件は、対称であることを考慮して

まず $\theta=0$ で $u=0$, $w=0$, $M=0$ および $\theta=\alpha$ で $w=0$, $\partial u/\partial \theta=0$ となるゆえ, これらより積分定数間の比が求められ, 次いで式(2)が次式のごとく書き改められる。

$$u(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X_i(\theta)}{P_i} (G_i \sin p_i t + H_i \cos p_i t) \quad (4)$$

ただし, $X_i(\theta) = \sum_{j=1}^3 (C_{j,i}^* \sin n_{j,i} \theta + D_{j,i}^* \cos n_{j,i} \theta)$, $G_i = p_i D_{1,i} E_i / (n_{2,i}^2 - n_{3,i}^2)$,
 $H_i = p_i D_{1,i} F_i / (n_{2,i}^2 - n_{3,i}^2)$, $C_{1,i}^* = e_1 / f$, $C_{2,i}^* = e_2 / f$, $C_{3,i}^* = e_3 / f$,
 $D_{1,i}^* = n_1^2 - n_3^2$, $D_{2,i}^* = n_3^2 - n_1^2$, $D_{3,i}^* = n_1^2 - n_2^2$, $e_1 = n_1 \{ (\cos n_1 \alpha - \cos n_3 \alpha) g_1 - (n_1^2 \cos n_1 \alpha - n_3^2 \cos n_3 \alpha) g_2 \}$,
 $e_2 = n_2 \{ (\cos n_1 \alpha - \cos n_2 \alpha) g_1 - (n_1^2 \cos n_1 \alpha - n_2^2 \cos n_2 \alpha) g_2 \}$, $e_3 = n_3 \{ (\cos n_1 \alpha - \cos n_3 \alpha) g_1 - (n_1^2 \cos n_1 \alpha - n_3^2 \cos n_3 \alpha) g_2 \}$,
 $f = n_1^2 \cos n_1 \alpha (\cos n_2 \alpha - \cos n_3 \alpha) + n_2^2 \cos n_2 \alpha (\cos n_1 \alpha - \cos n_3 \alpha) + n_3^2 \cos n_3 \alpha (\cos n_1 \alpha - \cos n_2 \alpha)$,
 $g_1 = n_1 (n_1^2 - n_3^2) \sin n_1 \alpha + n_2 (n_1^2 - n_2^2) \sin n_2 \alpha + n_3 (n_1^2 - n_3^2) \sin n_3 \alpha$,
 $g_2 = (n_1^2 - n_3^2) \sin n_1 \alpha / n_1 + (n_3^2 - n_1^2) \sin n_3 \alpha / n_3 + (n_1^2 - n_2^2) \sin n_2 \alpha / n_2$

次に, アーチ中央の衝撃点においてせん断力 Q が衝撃を与える物体による慣性力 $-m_2 \partial^2 u / \partial t^2$ の半分に等しくなることから, $\theta=\alpha$ で $Q = -m_2/2 \cdot (\partial^2 u / \partial t^2)$ が成立し, また $Q = \partial M / \partial \theta = -EI/R^3 (\partial^3 u / \partial \theta^3 + \partial u / \partial \theta)$ であることを考慮して式(4)を用うれば, 結局所要の振動数方程式が次式のごとく導かれる。

$$\frac{d^3 X_i(\alpha)}{d\theta^3} + \frac{dX_i(\alpha)}{d\theta} = -\alpha \cdot \eta \cdot k^2 \cdot X_i(\alpha) \quad (5)$$

ただし, $\eta = m_2/m_1$, $m_1 = 2\alpha R^3 \gamma A / g$
 上式に $X_i(\alpha)$ を代入すれば次式となる。

$$\sum_{j=1}^3 (n_j - n_j^*) (C_j^* \cos n_j \alpha - D_j^* \sin n_j \alpha) + \alpha \cdot \eta \cdot k^2 \sum_{j=1}^3 (C_j^* \sin n_j \alpha + D_j^* \cos n_j \alpha) = 0 \quad (6)$$

式(6)を用いて繰返し試算により固有値 k が算定されることとなるが, 一例として中心角 $2\alpha=120^\circ$ の場合

を求めれば, 表-1のごとき結果が得られる。一般に, 質量比 $\eta (=m_2/m_1)$ の増大に伴ない, 固有値 k は減少する傾向が見られるが, その差は僅かであることが分る。

さらに, 式(4)の積分定数 G_i および H_i を決定すれば, 半径方向変位 u が算定されることとなる。すなわち, 初期条件 $t=0$ で $u=0$ および $\partial u / \partial t = v_2$ ($\theta=\alpha$), $\partial u / \partial t = 0$ ($\theta \neq \alpha$) を用いれば, それぞれ $H_i=0$, $G_i = v_2 X_i(\alpha) / \{ \frac{1}{\alpha \eta} \int_0^\alpha X_i^2(\theta) d\theta + X_i^2(\alpha) \}$ として得られ, これらを式(4)に代入すれば, 結局所要の変位 u が次式のごとく求められることとなる。

$$u(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P_i} \cdot \frac{v_2 X_i(\alpha)}{\frac{1}{\alpha \eta} \int_0^\alpha X_i^2(\theta) d\theta + X_i^2(\alpha)} \cdot X_i(\theta) \sin p_i t \quad (7)$$

また, 接線方向変位 w も式(3)を用いて次式のごとく得られる。

$$w(\theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{P_i} \cdot \frac{v_2 \bar{X}_i(\alpha)}{\frac{1}{\alpha \eta} \int_0^\alpha \bar{X}_i^2(\theta) d\theta + \bar{X}_i^2(\alpha)} \cdot \bar{X}_i(\theta) \sin p_i t \quad (8)$$

ただし, $\bar{X}_i(\theta) = \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{C_{j,i}^*}{n_{j,i}} \cos n_{j,i} \theta + \frac{D_{j,i}^*}{n_{j,i}} \sin n_{j,i} \theta \right)$

(3) 衝撃荷重を受ける固定アーチの応答

2.(2)の2ヒンジアーチの場合と同様な解析が可能である。すなわち, 境界条件のうち $\theta=0$ で $M=0$ の代りに $\partial u / \partial \theta = 0$ を用うればよく, 結果として式(4)~式(8)の式表現は変らず, ただ式(4)中の係数内容のみが異なることとなるが, これらについては省略する。

表 - 1
固有値 $k_i = \alpha R^2 p_i$
2ヒンジアーチ $2\alpha=120^\circ$

k_i	Small	0.5	1.0	2.0	5.0	10.0	Large
k_1	17.92	11.43	9.012	6.790	—	—	—
k_2	53.92	46.35	44.88	43.93	43.28	43.00	42.80
k_3	107.9	91.86	89.80	88.59	87.80	87.53	87.25
k_4	179.9	163.2	161.6	160.6	160.0	159.8	159.6
k_5	270.0	244.8	242.8	241.8	241.1	240.8	240.6

式(7)を用いて2ヒンジおよび固定アーチ(中心角 $2\alpha = 120^\circ$)の中央矢のたわみを計算し、その結果を1/2周期について図-2および図-3に示した。これらはいずれも横軸に時間を t/aR^2 で、縦軸にたわみ u/aR^2 で表わしている。実際の計算では級数和の第5項まで(図中の点線)でほとんど収束するが、第1項のみ(図中の実線)の場合でもかなり良く近似していることが認められる。

一般に、たわみ u は質量比 η が大きくなれば増大し、周期は長くなる傾向にあることが分る。前者の傾向はアーチの質量 m_0 を一定とすれば、衝撃を与える物体の質量 m_1 が大きく $\frac{u}{aR^2} \cdot 10^2$ なることから当然であり、後者の傾向は表-1において固有振動数 p が小さくなることから明らかである。また当然ながら固定アーチのたわみの方が2ヒンジアーチのそれよりも小さくなっていることが確認される。

3. 模型実験および考察

(1) 実験方法

実験装置の概要は図-4に示すとおりで、衝撃荷重は重錘を硬化塩化ビニール管で誘導し、高さ20cm~60cm(衝撃速度198cm/sec~343cm/sec)から自然落下させ、試験体アーチの中央矢に横衝撃を与えた。重錘は直径30mmの鋼棒の先端を球面に仕上げ、長さ90mm(重さ465g)および180mm(重さ955g)の2種を用意した。

試験体は図-5に示すごとく、中心角 120° 、スパン長500mm、断面 $10\text{mm} \times 9\text{mm}$ 、重さ417gでSS-41(弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$)を用い、両端はナイフエッジとし支点での摩擦が少なくなるように製作した。また試験体には車軸strain gauge (Kyowa KP-6-AI-11)を図-5のご

とく中央矢内側、 -10° 、 10° 、 30° 、 45° の各矢内側と 10° の矢の外側の計6ヶ所に貼付した。動ひずみ計(Kyowa DM-6L)、シンクロスコープ(Tektronix 565)およびカメラを使用して各矢のひずみを記録した。

(2) 実験結果

結果の一例を示せば写真-1, 2のごとくである。写真-1は重錘の重さ465g(重錘と試験体との

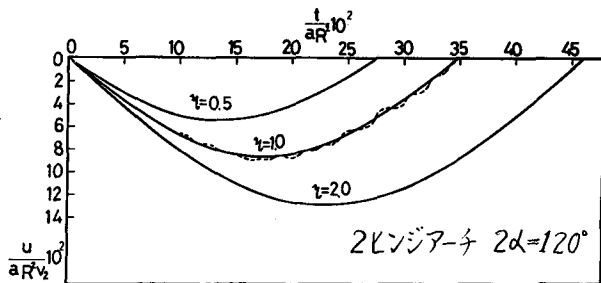


図-2

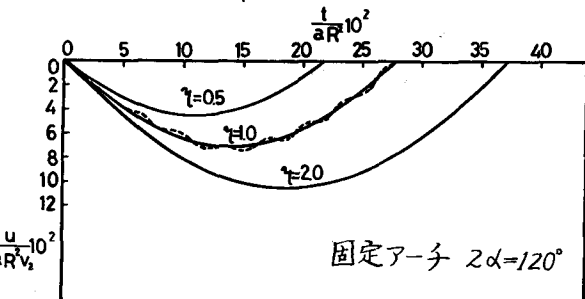


図-3

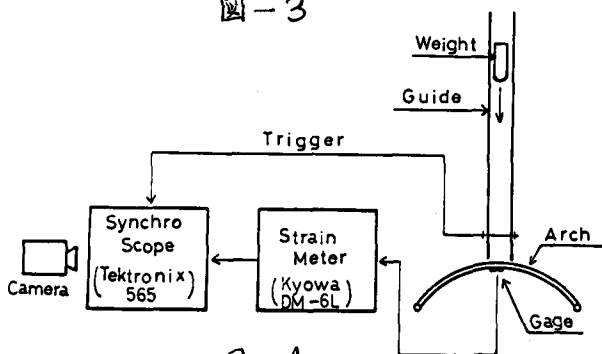


図-4

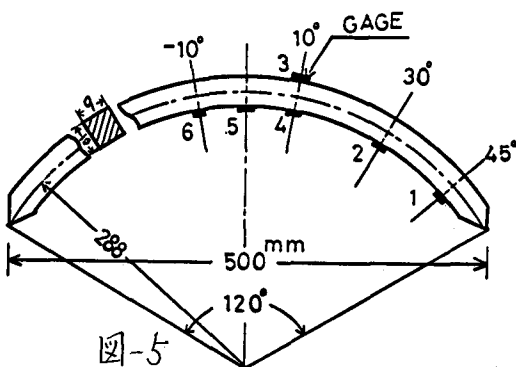


図-5

質量比 $\eta = 1.09$ に対し高さ $h = 20\text{ cm}$ (衝撃速度 $v_2 = 198\text{ cm/sec}$) の場合で、写真-2 は同じ重錘で $h = 40\text{ cm}$ ($v_2 = 280\text{ cm/sec}$) の場合である。基線より上は引張側、下が圧縮側であり、上より CH.1 (45° の内側), CH.2 (30° の内側), CH.3 (10° の外側), CH.4 (10° の内側), CH.5 (中央奥の内側) および CH.6 (-10° の内側) である。これらの実験はいずれも弾性限界内で再現性があることが認められた。次に、2. で得た理論値と比較するために、式(7)の u を用いて曲げモーメントを求め、これより外縁応力ひいては外縁ひずみを計算し、一例を図-6 に示した。ただし、本実験での衝撃速度(またはひずみ速度 $1.5\text{ sec}^{-1} \sim 2.7\text{ sec}^{-1}$) の範囲では $E = 2.1 \times 10^6\text{ kg/cm}^2$ が使用できるものとした。

(3) 考 察

(i) 写真-1, 2 より、一般に衝撃による過渡状態は急激に減衰し(衝撃後約 4 msec)、その後は定常状態に近くなる。(ii) 立ち上りの初期に小さい波が見られるのは3次振動の現われで、これはすぐ減衰しついで2次振動が持続している。しかし、ゲージの貼付位置による立ち上りの時間的遅れは認められない。(iii) 写真-1 より、CH.3 (10° の外側) のひずみ量が CH.4 (10° の内側) のそれよりやや大きくなっているが、これは軸線の伸縮による影響と思われる。(iv) 重錘の重さを一定として、衝撃速度を変化させれば、振動波形および周期は変らないが、振巾のみ異なることが判明した。これは図-2の結果に合致する。(v) 図-6より、過渡状態における理論上の振動波形は実験結果とかなり良く類似している。しかし、周期はやや小さくなっており、これは式(1)において減衰の影響を考慮しなかったためと考えられる。

4. む す び

本研究によって、衝撃荷重を受けるアーチの過渡的弾性応答が近似的に把握され、実験により理論の妥当性がほぼ確認された。さらに高精度の解を得るには、軸線の伸縮および減衰の影響を考慮する必要がある。

参考文献 1) M.M. Chen et al: Impulsive Loading of Rigid-Plastic Curved Beam, Proc. 4th U.S. N.C. Appl. Mech. 1962

2) E. Wenk: Radial Impact on an Elastically Supported Ring, Trans. A.S.C.E. Vol. 119, 1954 3) W. Goldsmith: Impact, Edward Arnold Ltd. 1960

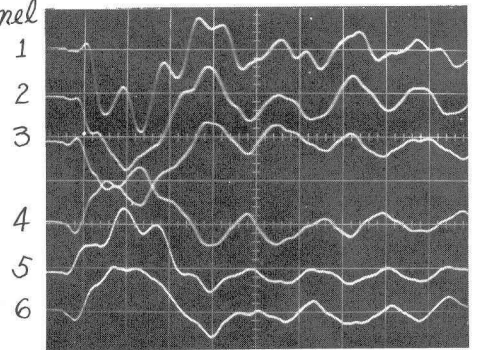


写真-1
 $\eta = 1.09$, $v_2 = 198\text{ cm/sec}$, 掃引 1 msec/div
CH.5のみ $1000\text{ }\mu\text{strain/div}$. 他は $400\text{ }\mu\text{strain/div}$

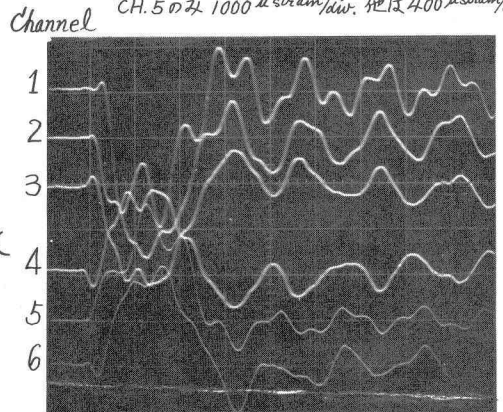


写真-2
 $\eta = 1.09$, $v_2 = 280\text{ cm/sec}$, 掃引 1 msec/div
CH.5のみ $1000\text{ }\mu\text{strain/div}$. 他は $400\text{ }\mu\text{strain/div}$

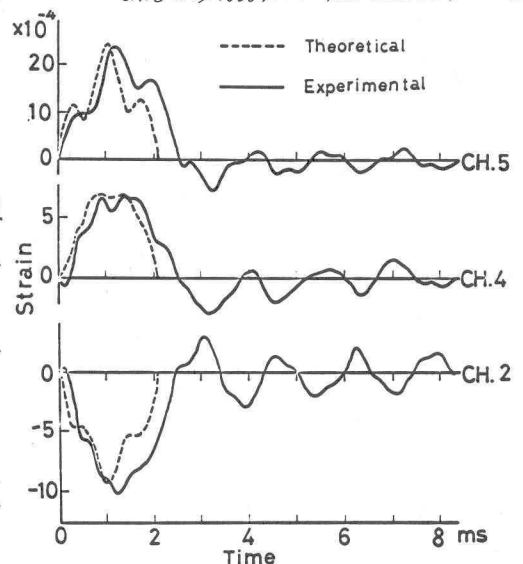


図-6 2ヒンジアーチ $\eta = 1.09$, $v_2 = 280\text{ cm/sec}$