

I-49 腹板の初期たわみがプレートガーダーの挙動に及ぼす影響についての理論的考察

京都大学工学部 正員 山田善一
同上 正員 O渡辺英一

1. まえがき

プレートガーダーの耐荷力を理論的に追求する方法は、現在、2つに大別できると考えられる。1つは Basler^{1), 2)} などの提案する、崩壊機構を仮定する方法であり、他の1つはヨーロツパの考え方である、板の有限変形理論に立脚した解析法である。前者においては、理論解の最終目的は究極的な耐荷力の算定であって、挙動の追求には当然ながら重点を置いていない。また簡単明瞭を旨とするため、変数をできるだけ少なくしている。例えば、ここぞとだけあげる、腹板の初期たわみなどは考慮されていない。一方後者においては理論の複雑性のために、プレートガーダーの究極的な崩壊状態まで追求することは難しいが、挙動を逐次追うことは可能である。したがって筆者らは、このような両者の長所を兼ね備えた方法によって、プレートガーダーの耐荷力を研究している。考え方基本としては有限変形理論を用いるが、その際、フランジの弾塑性挙動、任意の荷重条件、荷重の変化とともに変じ得る部材諸剛性を摂動法、差分法の使用によって考慮でき得るようにしている。

2. 腹板内の初期たわみについて

理論的に、初期たわみを決定することは、溶接の際の材料の物理的变化、製作誤差、圧延その他の問題がからみ、ほど不可能といえる。過去に諸々の所で行なわれた実験結果から判断すれば、初期たわみは避けられず、かなり不規則な大きさ、分布をしているといえる。図-1は参考にした実験資料より引用した矩形パネルの初期たわみの分布を示めている。^{3), 4), 5)} また、このパネルのいくつ

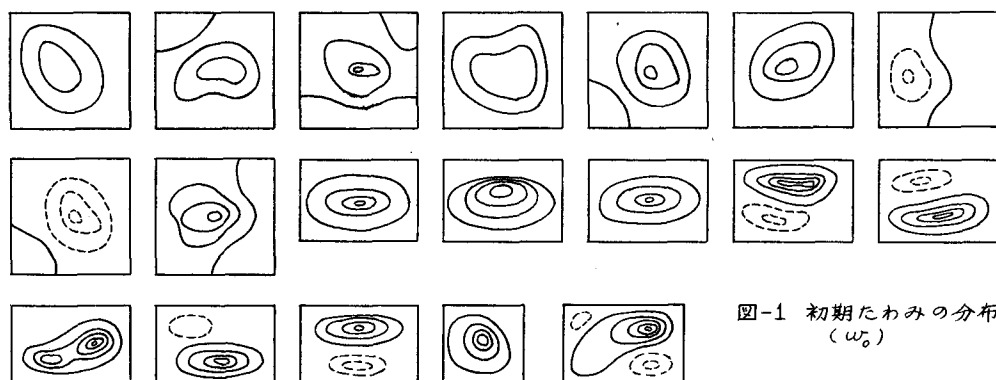


図-1 初期たわみの分布例 (w_0)

かは、一実験後、次の実験にも用いられたが、実験中の大変形のために、分布は荷重履歴にも依存すると報告されている。⁴⁾

さて、初期たわみ w_0 は初期非弾性たわみ w^* と初期弾性たわみ $w^{(0)}$ に分けられると考えられる。前者は腹板が境界部材より分離されたときの初期たわみ、後者は境界部材との適合変形を与えるために必要な弾性たわみであると考えられ、 $w_0 = w^* + w^{(0)}$ とおける。実験で認識できるのは w_0 であると考えられる。また、図-1より判るように、主な初期たわみの分布は縦横に1つの半波長

を有するようなものであり、せいぜい縦横何れかの方向に2波長を持ち、残りが一波長であるような変形が大部分であると思われる。本研究では w_0 を一般的な double Fourier series で表示できる。

3. 理論的解析

図-2 にパネルのモデルを示す。また、図-3 はフランジの残留応力の存在によってフランジが弾塑性的挙動を示すことを説明している。いま変位ベクトル成分を図-2の x, y, z 方向にそれぞれ u, v, w とすれば、腹板を弾性と仮定して次の通り合式を得る。6), 7)

$$\left\{ (R + TIR^T II) \left\{ S R^T \left((II + w_0 II^T) \right) u + \frac{1}{2} w^T II^T w^T II \right\} + \frac{\bar{\sigma}_0}{E} \right\} = \frac{D}{Eh} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} w_e^T$$

$$\text{ここに } w^T = w_0 + w; \quad w_e^T = w^{(0)} + w;$$

$$R = \begin{bmatrix} D_x & 0 & D_y \\ 0 & D_y & D_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_x & D_y & D_x + D_y \end{bmatrix};$$

$II =$ 単位マトリックス; $T =$ 転置マトリックス;

$$S = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix}; \quad h = \text{板厚}; \quad D = \text{板剛性}; \quad D_y \text{ etc} = \text{偏微分オペレーター}; \quad u = \text{変位ベクトル} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

図-3 圧縮、引張フランジの残留応力による影響(弾塑性挙動)

$$\bar{\sigma}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_{x0} \\ \bar{\sigma}_{y0} \\ \bar{\tau}_{xy0} \end{Bmatrix} = \text{初期腹板面応力}$$

さて、変位ベクトル u は初期変位ベクトル u_0 の近傍で、任意の小さなパラメータ ε で Taylor 展開できるので、次のように書ける。

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u^{(k)} \varepsilon^k + O(\varepsilon^3) \equiv u_0 + u^{(j)} \varepsilon^j + O(\varepsilon^3) \quad (j: \text{dummy})$$

また一般的な外力荷重 P も同様に $P = P_0 + P^{(j)} \varepsilon^j + O(\varepsilon^3)$ と書ける。さらに、境界部材の剛性を一般的に K で表示すれば、 K は u の関数でもあるから、初期の剛性、 K_0 で表示すると次のようになる。 $K = K(fu)$; f は偏微分オペレーターと考えて、

$$\begin{aligned} K &= K_0 + K^{(j)} \varepsilon^j + O(\varepsilon^3) = K_0 + \frac{1}{j!} \frac{\partial K}{\partial (fu)} \cdot f \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \varepsilon^j + O(\varepsilon^3) \\ &= K(fu_0) + \frac{1}{j!} \frac{\partial K}{\partial (fu)} \cdot f u^{(j)} \varepsilon^j + O(\varepsilon^3) \quad (l, j: \text{dummy}; j+l-1 \leq 2) \end{aligned}$$

と書ける。さらにまた、図-3 にある有効断面比 R, R' などは K の一特例と考えられるので、上記の記述がそのまま使用できる。なおこの Taylor 展開はいかなる荷重段階においても適用できる。なぜならば、ある荷重レベルでの変位、応力、ひずみ、剛性の値がそのまま次の荷重レベルでの

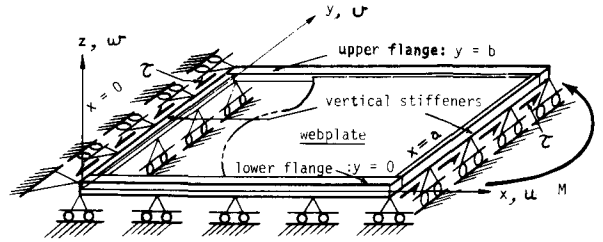
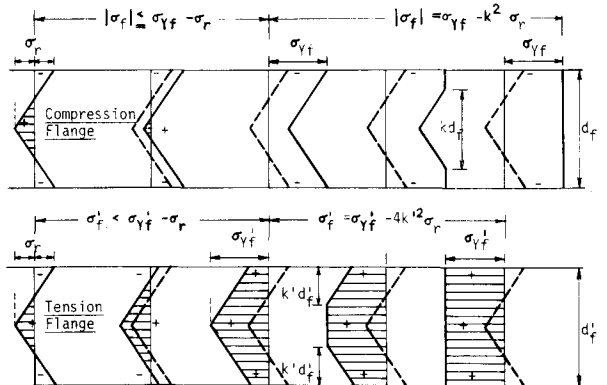


図-2 パネルの力学モデル



各初期値と考えられ、順次、これらの初期値を更新すればよいからである。この Taylor 展開式を例え
ば、腹板のつり合い式に代入すれば次の式が得られる。

$$RSR^t(I + \omega_0 I T^t) \omega^{(j)} \varepsilon^j = -\frac{1}{2} RSR^t \omega^{(1)} I T^t \omega^{(1)} I \varepsilon^2 \quad (\text{面内つり合い式})$$

$$\begin{aligned} TIR[\omega_0 I S R^t(I + \omega_0 I T^t) \omega^{(j)} + \omega^{(j)} I \frac{\bar{\sigma}_0}{E}] \varepsilon^j - \frac{D}{E\kappa} \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} \omega^{(1)} \varepsilon^1 \\ = -\frac{1}{2} TIR \omega^{(1)} I T^t \omega^{(1)} I \varepsilon^2 - TIR \omega^{(1)} I \bar{Q}^{(1)} \varepsilon^2 \quad (\text{面外つり合い式}) \end{aligned}$$

境界条件式も、変形、応力、ひずみ、剛性が Taylor 展開できるので結局 ε のべきの形式に書くこ
とができる。例えば、圧縮フランジの捻れ変形に関する一境界条件は次のようにかける。

$$K_f G J_f \frac{\partial^2 \omega_e^T}{\partial x^2 \partial y} + c_f \int_A \sigma_f \rho^2 d\rho \frac{\partial^2 \omega^T}{\partial x^2 \partial y} + D \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \omega_e^T = 0$$

ここに $K_f, G J_f, c_f, \sigma_f$ はそれぞれ圧縮フランジの等価捻れ剛性、フランジ厚、フランジ平均
応力である。 K_f は弾性変形の場合は 1 である。また図-3 で $|\sigma_f| > \sigma_{yf} - \sigma_T$ のときはフランジは弾
塑性であるが、全ひずみ理論によれば次のようにかける。⁸⁾

$$K_f = \kappa + \frac{1+\nu}{3\zeta_f} \log_e \frac{1}{1+\nu} [1+\nu+3\zeta_f(1-\kappa)] ; \quad \zeta_f = \frac{\sigma_T}{\sigma_{yf}}$$

したがって弾性の場合には座標変換 $\xi = (N-1) \frac{x}{a} + \eta = (N-1) \frac{y}{b}$ を用いれば次の様になる。

$$\begin{aligned} \left\{ \left[\frac{\psi_N}{\lambda} + \frac{\gamma_P}{\lambda} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_f \beta \zeta_f}{N-1} \right) \right] \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \tilde{\omega}^{(j)} \varepsilon^j + \left[\frac{\gamma_P}{\lambda} \frac{\partial^3 \tilde{\omega}_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \tilde{u}^{(j)} \varepsilon^j \\ = - \left(\frac{\gamma_P}{\lambda} \right) \frac{\partial \tilde{u}^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \varepsilon^2 ; \quad \psi_{fN} = 6(N-1)(1-\nu) \left(\frac{J_f}{a\kappa^3} \right) ; \quad \gamma_P = 12(N-1)^2 (1-\nu^2) \left(\frac{1}{\beta} \right) \left(\frac{I_P}{a\kappa^3} \right) \end{aligned}$$

一方、弾塑性の場合には次の式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\psi_{fN}}{\lambda} \left\{ \kappa^{(0)} + \log_e \frac{1}{1+\nu} [1+\nu+3\zeta_f(1-\kappa^{(0)})] \right\} \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{\alpha_f \gamma_{fN}}{\lambda} \left(1 - \frac{\kappa^{(0)}}{2} \zeta_f \right) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right\} \tilde{\omega}^{(j)} \varepsilon^j \\ + \frac{(N-1)}{2\alpha_f \zeta_f \beta \lambda} \left\{ \frac{\psi_{fN}(1+\nu)}{1+\nu+3\zeta_f} \frac{\partial^3 \tilde{\omega}^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \gamma_{fN} \kappa^{(0)} \frac{\partial^3 \tilde{\omega}_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right\} \frac{\partial}{\partial \xi} \tilde{u}^{(j)} \varepsilon^j = \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\psi_{fN}}{\lambda} \right) \frac{(N-1)^2}{(1+\nu+3\zeta_f)^2 \alpha_f^2 \beta^2} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}^{(0)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \varepsilon^2 \\ - \frac{3\gamma_{fN} \kappa^{(0)} (N-1)^2}{4\alpha_f \zeta_f \beta^2 \lambda} \left(\frac{\partial \tilde{u}^{(1)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} \varepsilon^2 - \frac{(N-1)}{2\alpha_f \zeta_f \beta \lambda} \left[\frac{\psi_{fN}(1+\nu)}{1+\nu+3\zeta_f} + \gamma_{fN} \kappa^{(0)} \right] \frac{\partial \tilde{u}^{(1)}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \eta} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

ここに $\gamma_{fN} = 12(N-1)(1-\nu^2) \left(\frac{I_P}{a\kappa^3} \right)$; I_P = 断面極二次モーメント ; $\kappa^{(0)} = \frac{1}{2\zeta_f} (1 + \zeta_f + \frac{N-1}{\alpha_f \beta} \frac{\partial \tilde{u}^{(0)}}{\partial \xi})$;
 $\beta = \frac{a}{b} =$ 腹板幅厚比 ; $\lambda = b/a =$ aspect ratio ; $\alpha_f = \frac{\sigma_{yf}}{E}$; $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}) = \frac{1}{\kappa} (u, v, w)$ である。

つぎに、これら諸々の式は ε のべき級数の形に表現されているが、同次の項をそれぞれの式で拾えば
線形化されている。このような線形化された関係式はとても解析的には解けないので差分の形に書
き直す必要がある。結果的にいえば図-4 のような mesh を考えると一方向の分割を N とすれ
ば、未知数である u, v, w の総計は $3N^2 + 9N - 11$ となる。 $(N=5$ のとき 109, $N=7$ のとき 199)

4. 数値計算例

曲げを受けるパネルの挙動が初期たわみ ω_0 の分布を変化させたときにどのように変わるかを調べ

てみた。ここでは初期たわみが (1) 正弦曲線: $\tilde{w}_0$
 $= \mu \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ のときと (2) 余弦曲線: $\tilde{w}_0$
 $= \frac{\mu}{4} [1 - \cos \frac{2\pi x}{a}] [1 - \cos \frac{2\pi y}{b}]$ で表わせる場合を例と

してとりあげた。数値計算においては荷重レベルを約 25 段階に分割し、荷重へたわみ曲線の接線勾配が大なる場合には荷重増分を、また腹板の線形座屈荷重近傍でのように、接線勾配が小のときは特定点のたわみ増分を振動パラメータとして挙動を逐次追跡した。図-5 は荷重と圧縮フランジの回転角の関係を上記の 2 つの初期たわみ分布を有する場合について、また異なるフランジの残留応力の大きさについて示めている。図-6 は一パネル断面のたわみ波形の変化を示めているが、圧縮側の腹板のたわみが急に大きくなる事を意味している。

5. あとがき

現在さらに多くの場合について数値計算を行なっているので残りはスライドで発表したい

6. 参考文献

- 1) Basler, K. & Thurlimann, B. Strength of plate girders in bending. J. Str. Div., ASCE, 87, No. ST6, 1961, p153.
- 2) Basler, K. Strength of plate girders in shear. J. Str. Div., ASCE, 87, No. ST7, 1961, p.181.
- 3) 関西橋梁数値溶接研究会 プレートガーダーの耐荷力に関する理論と実験 日本印刷出版社 1965
- 4) Basker, K., Yen, B. T., Mueller, J. A. and Thurlimann, B. Web buckling tests on welded plate girders. Bulletin Series, Welding Research Council, 64, 1960.
- 5) Patterson, P. J., Corrado, J. A., Huang, J. S. and Yen, B. T. Proof-tests of two slender-web welded plate girders. Fritz Engineering Laboratory Report, 327.7, 1969.
- 6) Watanabe, E. & Lee, Ti-Ta A method of analysis of webplates with large deflections. Proc. JSCE, 183, 1970
- 7) 山田喜一, 増田英一, 大槻有吾 プレートガーダーの耐荷性状についての一解析法 日本鋼橋連協会 マトリクス橋連解析法 シンポジウム論文集, 1971
- 8) 大槻有吾 プレートガーダー耐荷力に関する振動法および臨界法による理論的考察 京都大学修士論文 1971

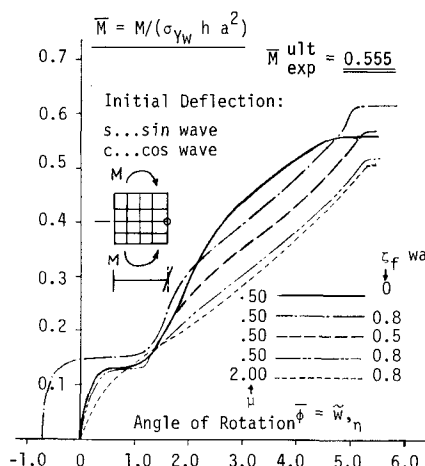


図-5 荷重-圧縮フランジの回転角の関係

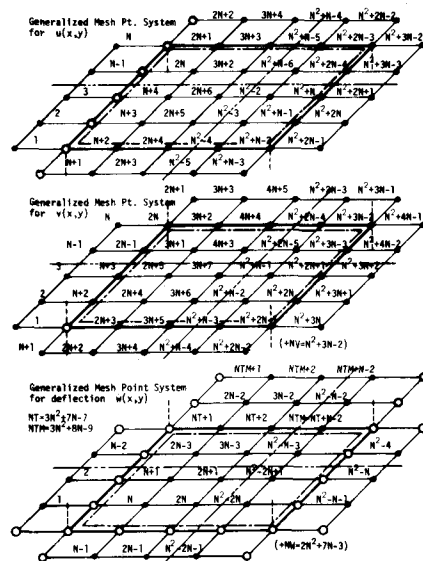


図-4 変位 W の格子点分割

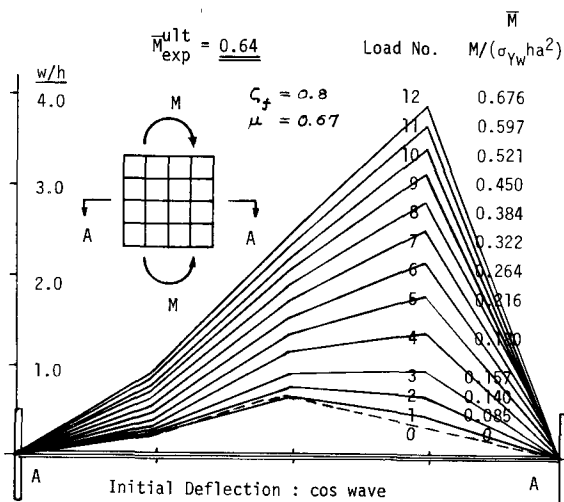


図-6 腹板のたわみ波形の荷重による変化