

I-48 プレート ガーダーの非弾性曲げ座屈

関西大学工学部 正会員 ○三 上 市 藏

関西大学工学部 正会員 米 沢 博

まえがき プレート ガーダーの耐荷力に関してはこれまで数多くの研究がなされてきたが、最近とくに精力的に研究がなされている。プレート ガーダーの曲げに対する耐荷力を取り扱う場合、種々の方法¹⁾が考えられる。一つは Basler-Thürlimann⁶⁾ による方法で、圧縮フランジと腹板の一部からなるT形断面の柱の座屈とみなす方法である。また桁としての横倒れと考える方法¹⁾もある。著者らは補剛された腹板を直交異方性長方形板と考へ、その腹板と圧縮フランジとの連成座屈²⁾を理論的および実験的に検討したが、これも耐荷力を検討する一つの方法である。

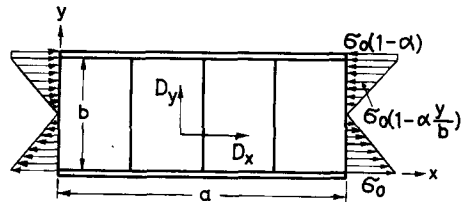


図-1

著者らのこの研究は弾性座屈に関するものであるが、その後フランジのみ非弾性域に入ること考へて理論的⁴⁾・実験的³⁾に検討した。今回は、さらに腹板の一部も非弾性域に入ること考へた。

微分方程式とその解 プレート ガーダーの長さ a の部分が図-1に示すように曲げを受ける場合を考へる。すなわち腹板と補剛材を一体とみなし、鉛直補剛材方向およびフランジ方向の曲げ剛さがそれぞれ D_x, D_y で、2辺の長さが a, b である直交異方性長方形板が $x=0, a$ で単純支持され、圧縮フランジで弾性支持および弾性固定され、引張フランジで単純支持されているものとする。

非弾性域では曲げ剛さなどが一定とはならないから、腹板部分が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式としてつぎの直交異方性変厚板に対するもの¹⁰⁾を用いる。

$$\begin{aligned} D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (v_y D_x + v_x D_y + 4D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \left[\frac{\partial D_x}{\partial x} x \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial y} (v_x D_y + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} (v_y D_x + 2D_{xy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial D_y}{\partial y} y \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right] + \left(\frac{\partial^2 D_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x D_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 D_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 D_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y D_x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = h \sigma_0 (1 - \alpha \frac{y}{b}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

ここに $2D_{xy}$ は直交異方性板のねじり剛さ、 v_x, v_y は x, y 方向のポアソン比、 h は腹板厚、 σ_0 は $y=0$ における軸方向引張応力、 α は中立軸の位置によって決まる定数である。

圧縮フランジが座屈したときの微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{d^2}{dx^2} (B_b \frac{d^2 w_b}{dx^2}) - \frac{d}{dx} \{ F \sigma_0 (1 - \alpha) \frac{dw_b}{dx} \} = \left[\frac{\partial}{\partial y} (D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_x D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + 2 \frac{\partial}{\partial x} (2D_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}) \right]_{y=b} \dots\dots (2)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} (C_w \frac{d^2 \phi_b}{dx^2}) - \frac{d}{dx} (C_b \frac{d\phi_b}{dx}) - \sigma_0 (1 - \alpha) I_o \frac{d^2 \phi_b}{dx^2} = - [D_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v_x D_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]_{y=b} \dots\dots\dots (3)$$

ここに B_b, C_w, C_b, F および I_o はそれぞれ圧縮フランジの面内曲げ剛さ、そり剛さ、純ねじり剛さ、断面積およびフランジの重心に関する極2次モーメントである。

非弾性域では $D_x, D_y, D_{xy}, v_x, v_y, B_b, C_w$ および C_b がそれぞれ $D'_x, D'_y, D'_{xy}, v'_x, v'_y, B'_b, C'_w$

および c_b^1 に変化するとし、つぎの係数を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_x &= D_x'/D_x, \quad \tau_y = D_y'/D_y, \quad \tau_{xy} = D_{xy}'/D_{xy}, \quad \tau_1 = \tau_x D_y'/\tau_x D_y = \tau_y D_x'/\tau_y D_x, \\ \tau_{bb} &= B_b^1/B_b, \quad \tau_{cw} = C_w/C_w, \quad \tau_{cb} = C_b^1/C_b. \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

弾性域ではこれらの係数はすべて 1 である。x 方向の応力のみが作用しているから、これら τ は y のみの関数であり、式 (1) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} D_x \tau \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (v_y D_x \tau_1 + v_x D_y \tau_1 + 4 D_{xy} \tau_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \tau_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(v_x D_y \frac{d\tau_1}{dy} + 2 D_{xy} \frac{d\tau_{xy}}{dy}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ + 2 D_y \frac{d\tau_y}{dy} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + v_x D_y \frac{d\tau_1}{dy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_y \frac{d^2 \tau_y}{dy^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = h \sigma_0 (1 - \alpha \frac{y}{b}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここで式 (5) の解として $x=0, a$ における境界条件を満足する関数

$$w = b \sum_{m=1}^{\infty} f(\eta) \sin(m\pi x/a), \quad \eta = y/b \dots\dots(6)$$

を仮定し、式 (5) に代入するとつぎの常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau_y \frac{d^4 f}{d\eta^4} + 2 \frac{d\tau_y}{d\eta} \frac{d^3 f}{d\eta^3} + [\frac{d^2 \tau_y}{d\eta^2} - (K_m N_v + M_v) \tau_1 - M_p \tau_{xy}] \frac{d^2 f}{d\eta^2} \\ - (2M_v \frac{d\tau_1}{d\eta} + M_p \frac{d\tau_{xy}}{d\eta}) \frac{df}{d\eta} + [K_m \tau_x - M_v \frac{d^2 \tau_1}{d\eta^2} + (1 - \alpha \eta) \mu_m] f = 0 \dots\dots(7) \end{aligned}$$

ただし、 $K_m = \phi^2 D_x/D_y$, $\mu_m = \phi \sigma_0 h b^2/D_y$, $\phi = (m\pi b/a)^2$, $M_p = 4\phi D_{xy}/D_y$, $M_v = v_x \phi$, $N_v = v_y/\phi$ である。

式 (2), (3) の解を

$$w_b = b \sum_{m=1}^{\infty} A_1 \sin(m\pi x/a) \dots\dots(8) \quad \phi_b = \sum_{m=1}^{\infty} A_2 \sin(m\pi x/a) \dots\dots(9)$$

とおくと、 $y=b$ における腹板とフランジの連続条件 $w_b = (w)_{y=b}$, $\phi_b = (\partial w/\partial y)_{y=b}$ から $A_1 = (f)_{\eta=1}$, $A_2 = (df/d\eta)_{\eta=1}$ となるから、式 (6), (8), (9) を式 (2), (3) に代入するとつぎのようになる。

$$[\tau_y \frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{d\tau_y}{d\eta} \frac{d^2 f}{d\eta^2} - (M_p \tau_{xy} + M_v \tau_1) \frac{df}{d\eta} - (M_v \frac{d\tau_1}{d\eta} + M_b \tau_{bb} + M_F \mu_m) f]_{\eta=1} = 0 \dots\dots(10)$$

$$[\tau_y \frac{d^2 f}{d\eta^2} + (N_w \tau_{cw} + N_b \tau_{cb} + N_I \mu_m) \frac{df}{d\eta} - M_v \tau_1 f]_{\eta=1} = 0 \dots\dots(11)$$

ただし、 $M_b = \phi^2 B_b/bD_y$, $M_F = (1 - \alpha)F/bh$, $N_w = \phi^2 C_w/b^3 D_y$, $N_b = \phi C_b/bD_y$, $N_I = (1 - \alpha)I_0/b^3 h$ である。

また $y=0$ における境界条件からつぎの式が得られる。

$$(f)_{\eta=0} = 0 \dots\dots(12) \quad (d^2 f/d\eta^2)_{\eta=0} = 0 \dots\dots(13)$$

階差法による解

階差法を用いて式 (7) を解く。腹板高 b を n 等分し、格子点には $y=0$ から順に $i=0, 1, \dots, n$ と番号をつける。通常の階差表示を用いれば、式 (7) はつぎのようになる。

$$A_{i,i+2} \cdot f_{i+2} + A_{i,i+1} \cdot f_{i+1} + A_{i,i} \cdot f_i + A_{i,i-1} \cdot f_{i-1} + A_{i,i-2} \cdot f_{i-2} = \mu_m B_{i,i} \cdot f_i \dots\dots(14)$$

ただし $A_{i,i+2} = (n^4/2) (\tau_{y,i+1} + 2\tau_{y,i} - \tau_{y,i+1})$,

$$\begin{aligned} A_{i,i+1} = 2n^4 (-3\tau_{y,i} + \tau_{y,i-1}) + (n^2/4) M_p (-\tau_{xy,i+1} - 4\tau_{xy,i} + \tau_{xy,i-1}) \\ + (n^2/2) [-M_v \tau_{1,i+1} - 2(K_m N_v + M_v) \tau_{1,i} + M_v \tau_{1,i-1}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i} = 2n^4 (-\tau_{y,i+1} + 5\tau_{y,i} - \tau_{y,i-1}) + K_m \tau_{x,i} + 2n^2 M_p \tau_{xy,i} \\ + n^2 [-M_v \tau_{1,i+1} + 2(K_m N_v + 2M_v) \tau_{1,i} - M_v \tau_{1,i-1}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{i,i-1} = 2n^4 (\tau_{y,i+1} - 3\tau_{y,i}) + (n^2/4) M_p (\tau_{xy,i+1} - 4\tau_{xy,i} - \tau_{xy,i-1}) \\ + (n^2/2) [M_v \tau_{1,i+1} - 2(K_m N_v + M_v) \tau_{1,i} - M_v \tau_{1,i-1}], \end{aligned}$$

$$A_{i,i-2} = (n^4/2) (-\tau_{y,i+1} + 2\tau_{y,i} - \tau_{y,i-1}), \quad B_{i,i} = i\alpha/n - 1.$$

同様に式(10)はつぎのようになる。

$$A_{n+2,n+2} \cdot f_{n+2} + A_{n+2,n+1} \cdot f_{n+1} + A_{n+2,n} \cdot f_n + A_{n+2,n-1} \cdot f_{n-1} + A_{n+2,n-2} \cdot f_{n-2} \\ = \mu_m B_{n+2,n} \cdot f_n \dots\dots\dots (15)$$

ただし $A_{n+2,n+2} = (n^3/2) \tau_{y,n}$, $A_{n+2,n+1} = (n^3/2) (\tau_{y,n+1} - 2\tau_{y,n} - \tau_{y,n-1}) - (n/2) (M_p \tau_{xy,n} + M_v \tau_{1,n})$,
 $A_{n+2,n} = -n^3 (\tau_{y,n+1} - \tau_{y,n-1}) - (n/2) M_v (\tau_{1,n+1} - \tau_{1,n-1}) - M_b \tau_{bb}$, $B_{n+2,n} = M_F$,
 $A_{n+2,n-1} = (n^3/2) (\tau_{y,n+1} + 2\tau_{y,n} - \tau_{y,n-1}) + (n/2) (M_p \tau_{xy,n} + M_v \tau_{1,n})$, $A_{n+2,n-2} = -(n^3/2) \tau_{y,n}$,
 式(11)はつぎのようになる。

$$A_{n+1,n+1} \cdot f_{n+1} + A_{n+1,n} \cdot f_n + A_{n+1,n-1} \cdot f_{n-1} = \mu_m (B_{n+1,n+1} \cdot f_{n+1} + B_{n+1,n-1} \cdot f_{n-1}) \dots (16)$$

$$A_{n+1,n+1} = n^2 \tau_{y,n} + (n/2) (N_w \tau_{cw} + N_b \tau_{cb}),$$

$$A_{n+1,n} = -2n^2 \tau_{y,n} - M_v \tau_{1,n},$$

$$A_{n+1,n-1} = n^2 \tau_{y,n} - (n/2) (N_w \tau_{cw} + N_b \tau_{cb}),$$

$$B_{n+1,n+1} = -B_{n+1,n-1} = -(n/2) N_1.$$

また式(12),(13)は, $f_0 = 0$, $f_{-1} = -f_1$ となる。

$i=1 \sim n$ の n 個の格子点に対する式(14)と式(15),(16)の計 $(n+2)$ 個の式から f_0 , f_{-1} を消去すれば, 仮想点も含めて $f_1 \sim f_{n+2}$ に関するつぎの式が得られる。

$$[A] \cdot \{f\} = \mu_m \cdot [B] \cdot \{f\} \dots\dots\dots (17)$$

数値計算は図-2のフロー・チャートにしたがって行なわれる。

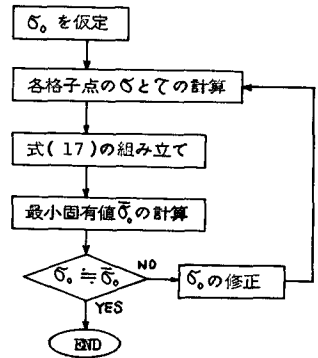


図-2

有効係数 非弾性域に対する式(4)の τ 値を正確に決定するのは容易ではない。等方性板の非弾性変形に關しては, 塑性変形理論(Stowell, Bijlaard), 塑性流れ理論(Handelman-Prager), Bleich, Kaufman, 等方性等価係数理論(Ros-Eichinger), 等方性接線係数理論(山本), 直交異方性接線係数理論(藤田)など種々の理論^{5)~9)}がある。これらのうち主なものを整理すると表-1のようになる。ただし $\tau = E_t/E$, $\eta = E_s/E$, $e = 1/\eta - 1$ で, E , E_t および E_s はそれぞれヤング率, 接線係数, および割線係数である。Stowell の値は Bijlaard の値において $v=1/2$ と, Handelman-Prager の値は Bijlaard の値において $\eta=1$ とみなした場合にそれぞれ相当している。これらの理論の数値的な比較は表-2のようになる。この表は τ の値として Bleich の与えた $\tau = (\sigma_y - \sigma)/(\sigma_y - \sigma_p) \sigma_p$ (ただし σ_y : 降伏応力, σ_p : 比例限応力, σ : 作用応力)と, η の値としてこの式から求めた $\eta = 16\sigma_p/[1 + (1 + \sigma_p/\sigma_y) \log_e \{(\sigma/\sigma_p)^2/\tau\}]$ と用い, $\sigma_p/\sigma_y = 0.75$, $v = 1/3$ として計算した結果である。Bleich の値は Stowell の値の近似のようにいわれているが,

表-1

るが, もし
 る直交異方
 性接線係数
 理論の近似
 とみるべき
 であろう。
 異方性板

	τ_x	τ_y	τ_{xy}	τ_1
Stowell	$\eta(1+3\tau/\eta)/4$	η	η	η
Bleich	τ	1	$\sqrt{\tau}$	$\sqrt{\tau}$
Bijlaard	$\frac{(1-v^2)(1+3\tau/\eta)}{5-4v+3e-(1-2v)^2\tau}$	$\frac{4(1-v^2)}{5-4v+3e-(1-2v)^2\tau}$	$\frac{2(1+v)}{2(1+v)+3e}$	$\frac{2(1-v^2)[1-(1-2v)\tau]}{v[5-4v+3e-(1-2v)^2\tau]}$
Handelman-Prager	$\frac{(1-v^2)(1+3\tau)}{5-4v-(1-2v)^2\tau}$	$\frac{4(1-v^2)}{5-4v-(1-2v)^2\tau}$	1	$\frac{2(1-v^2)[1-(1-2v)\tau]}{v[5-4v-(1-2v)^2\tau]}$
Fujita	$\frac{(1-v^2)\tau}{1-v^2\tau}$	$\frac{1-v^2}{1-v^2\tau}$	$\frac{2(1+v)\tau}{1+(1+2v)\tau}$	$\frac{(1-v^2)\tau}{1-v^2\tau}$

の非弾性域の有効係数についてあまりよく分っていないようであるが、直応力方向の E, ν が変化するという考えで、取り扱いの簡単な Bleich の値を用いることにする。

フランジの剛さは弾性域では $B_b = EI_b$, $C_w = EI_w$, $C_b = GJ$ (I_b : 面内に関する断面2次モーメント, I_w : ねじり中心に関するそり定数, J : ねじり定数, G : せん断弾性係数)と表わせ、非弾性域では E, G の代りに E_t, G_t を用いればよいから $\tau_{bb} = \tau_{cb} = E_t/E = \tau$ となる。 G_t は理論によって異なるが、ここでは Bleich の値を用い、 $\tau_{cb} = \sqrt{\tau}$ とする。

なお腹板の引張領域に対しても単のため圧縮領域の τ を準用する。

残留応力と初期たわみ 座屈に影響を与える要因の中でも、この2つはとくに大きな影響を与えるといわれている。その影響を厳密に取り

扱うのはなかなか困難である。式(4)の τ はこれらを総合的に取り扱うのに都合がよい。しかも、残留応力の影響を検討するために利用することができる。たとえば、圧縮フランジの場合、理想弾塑性材料を仮定し、残留応力分布を定めると弾性部分のそり定数 I_{we} を用いて $C'_w = EI_{we}$ と表わせる。¹⁾ すなわち $\tau_{cw} = I_{we}/I_w$ となり、 τ_{cw} は作用応力の関数になり、式(17)を用いて座屈応力が計算できる。

なお、現在数値計算を行なっているので、結果を講演会当日に発表したい。

表-2

σ/σ_y		0.95	0.90	0.85	0.80	0.75
τ_x	Stowell	0.407	0.595	0.754	0.889	1.000
	Bleich	0.253	0.480	0.680	0.853	1.000
	Bijlaard	0.407	0.592	0.750	0.885	1.000
	Handelman Prager	0.430	0.600	0.752	0.886	1.000
	Fujita	0.232	0.451	0.654	0.838	1.000
τ_y	Stowell	0.867	0.941	0.978	0.995	1.000
	Bleich	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Bijlaard	0.867	0.936	0.971	0.991	1.000
	Handelman Prager	0.977	0.984	0.990	0.995	1.000
	Fujita	0.915	0.939	0.962	0.982	1.000
τ_{xy}	Stowell	0.867	0.941	0.978	0.995	1.000
	Bleich	0.503	0.693	0.825	0.924	1.000
	Bijlaard	0.852	0.935	0.975	0.994	1.000
	Handelman Prager	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	Fujita	0.457	0.711	0.850	0.939	1.000
τ_l	Stowell	0.867	0.941	0.978	0.995	1.000
	Bleich	0.503	0.693	0.825	0.924	1.000
	Bijlaard	1.191	1.179	1.127	1.064	1.000
	Handelman Prager	1.342	1.240	1.149	1.068	1.000
	Fujita	0.232	0.451	0.654	0.838	1.000

1) 福本・藤原・渡辺：溶接I形部材の横倒れ座屈に関する実験的研究，土木学会論文報告集，No.189，昭46.5.，pp. 39-51.

2) 小西・米沢・三上：プレート ガーダーの曲げ弾性座屈，土木学会論文集，No.143，昭42.7.，pp. 1-8.

3) 米沢・三上：プレート ガーダーの塑性曲げ座屈に関する一研究，土木学会関西支部年次学術講演会，昭43.5.

4) 米沢・三上・赤松：プレート ガーダー圧縮フランジの非弾性たわみねじれ座屈，土木学会年次学術講演会，昭43.11.

5) 藤田・楠田・川井：塑性設計法，森北出版，昭41.

6) Basler, K., and Thürliman, R., "Strength of Plate Girders in Bending," Proc. ASCE, 87, ST6, 1961, pp. 153-181.

7) Bleich, F., Buckling Strength of Metal Structures, McGraw-Hill, 1952.

8) Haaijer, G., and Thürlimann, B., "On Inelastic Buckling in Steel," Proc. ASCE, 84, EM2, 1958, pp. 1581-1548.

9) Nishino, F., Tall, L., and Okumura, T., "Residual Stress and Torsional Buckling Strength of H and Cruciform Columns," Tran. JSCE, 160, Dec., 1968, pp. 75-87.

10) Yonezawa, H., and Mikami, I., "Deflections and Bending Moments of Orthotropic Rectangular Plates of Variable Thickness," Proc. 14th JNCAM, 1964, pp. 39-43.