

徳島大学工学部 正会員 星 治雄

児嶋弘行

○平尾 潔

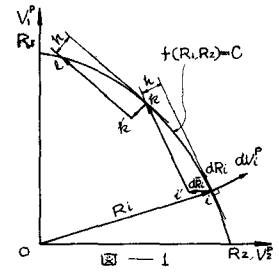
1. はじめに 部材の降伏条件に曲げのみと軸力のみを考えた塑性解析についてはすでに多くの解析方法が研究されており、筆者らも内力追跡法による塑性解析プログラムを作成し、漸増荷重とウける平面棒構造物の破壊過程とか破壊荷重などの自動追跡に成功している²⁾。また、同様な手法で曲げと軸力および曲げと捩りの2次元組み合わせ応力を考えた場合についても近似解析を試みたが、これらの解析では塑性流れ理論を無視してある断面が降伏してしまえばそれ以後その断面では考えている組み合わせ応力の各応力方向に無制限な塑性変形が生ずるものと仮定しているため、組み合わせ応力の一方の応力が非常に小さい場合に、曲げだけとか軸力だけを考えた単純塑性理論の場合の結果と大差を生ずるという矛盾した結果が得られた。したがって、これらの解析は塑性流れ理論を導入して修正される必要があるものと思われる。ただ、この塑性流れ理論によれば、降伏断面における塑性変形ベクトルの向きはその断面の応力長に対応する降伏曲線上の外向き法線^{3),4)}の方向と一致するため、降伏条件式が直線となる場合以外は、応力の微少な中立変化に対して、その都度、この変形ベクトルの向きを修正してゆく必要があるため解析がかなり煩雑となる。それゆえ、この塑性流れ理論を考慮した塑性解析例としては機構法による簡単なラーメンとかアーチ⁵⁾および直交格子桁⁶⁾を対象としたもの以外はあまり研究がなされていない現状である。以上のようなことから、筆者らは一般的な平面棒構造物および格子構造物が曲げと軸力および曲げと捩りの2次元組み合わせ応力で降伏する場合について、文献⁷⁾を参考にし、上述のような塑性流れ理論を考慮した内力追跡法による近似塑性解析方法について研究し、現在解析プログラムの作成中である。したがって、ここでは本研究における解析上の仮定、線形近似の方法、弾性計算部分に用いる変形法の基本式および解析手順などについて紹介し、解析例については講演会当日発表する予定である。なお、平面棒構造物の場合と格子構造物の場合では降伏条件式および変形法の基本式が異なるだけで、基本式の誘導方法とか解析手順などはまったく同様であるから本文では平面棒構造物の場合だけについて述べる。

2. 解析上の仮定 本研究で仮定した主なものを列挙すればつぎのようである。1) 構造物を構成する部材はすべて完全塑性材料とする。2) 本解析では個々の部材および構造全体の不安定現象は考慮しない。3) 構造物の変形に伴う幾何学的変化およびせん断力の降伏条件式におよぼす影響は無視する。4) 本研究で扱う外荷重はすべて同じ割合で連続的に増加するものとする。

3. 線形近似 (piecewise linearise) の方法について 応力 R_1, R_2 の組み合わせによる降伏条件式を考えた場合、任意断面 i が降伏すれば、断面 i での塑性変形増分ベクトル dV_i 、応力増分ベクトル dR_i の方向は、それぞれ、図-1 のように i 点における外向き法線および接線方向と一致し、これらの間には直交条件より式(1)が成立する。 $G_i \cdot dR_i = 0 \quad (G_i = dV_i / \mu_i)$ (1)

ただし、 G_i : i 点における外向き法線ベクトル、 μ_i : 流れ定数 (正のスカラー量) である。

ところが、降伏条件式が曲線の場合、これらの G_i, dR_i の方向は断面 i の塑性変形に伴ってたえず変化し、降伏後の断面 i における応力-変形の関係が非線形となり、解析が複雑になるため、つぎのような手順により線形近似を行なう。



- 1) 断面 i におけるベクトル G_i および dR_i を決定する。
- 2) あらかじめ定められた値により式(2)にしたがって i 断面の応力ベクトル R_i と dR_i だけ降伏曲線の内側へ移動する。 $G_i \cdot dR_i = -h$ — (2)
- 3) 降伏後の荷重増加に対しては断面 i における G_i の方向を一定と考え応力も直線状に沿って変化するものと仮定する。($dR_i \parallel dR_i$)
- 4) 仮定についても以上の 1), 2), 3) と同様な手順を繰返す。

なお、以上の線形近似の手順は降伏条件式が直線の場合には G_i, dR_i の方向が一定であるから必要となる。

4. 変形法の基本式 ここでは塑性流れ理論を考慮した場合の内力追跡法による塑性解に必要となる、各種の材端条件に応じた変形法の基本式とそれらの誘導方法を簡単に紹介する。

部材軸と x 軸と一致させた i, j 系に対する変形法の材端力と節変形量 δ との間には一般につぎの

$$S_i = K_{ii} \cdot \delta_i + K_{ij} \cdot \delta_j, \quad S_j = K_{ji} \cdot \delta_i + K_{jj} \cdot \delta_j \quad (3)$$

式(3)の関係があり、平面棒構造物の場合には S, δ, K はつぎのようになる。

$$S_i = \begin{bmatrix} N_{ii} \\ Q_{ii} \\ M_{ii} \end{bmatrix}, \quad S_j = \begin{bmatrix} N_{ji} \\ Q_{ji} \\ M_{ji} \end{bmatrix}, \quad \delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{xi} \\ \delta_{yi} \\ \theta_i \end{bmatrix}, \quad \delta_j = \begin{bmatrix} \delta_{xj} \\ \delta_{yj} \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad K_{ii} = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_2 & b_1 & c_1 \\ -a_3 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \quad K_{ij} = \begin{bmatrix} -a_1 & a_2 & -a_3 \\ a_2 & -b_1 & c_1' \\ a_3 & -c_1 & d_1' \end{bmatrix} \quad (4)$$

したがって、以下に、各種の材端条件に応じた stiffness matrix K_{ii}, K_{ij} の各要素 $a_1, a_2, a_3, \dots, d_1, d_1'$ を示す。ただし、式中の $a, b, c, b', c', d, d', d'$ はそれぞれ式(5)のような値である。

$$a = EF/l, \quad b = 12EI/l^3, \quad c = 6EI/l^2, \quad b' = 3EI/l^2, \quad c' = 6EI/l^2, \quad d = 4EI/l, \quad d' = 2EI/l, \quad d'' = 3EI/l \quad (5)$$

- 1) i, j 両端剛結 $a_1 = a, a_2 = a_3 = a_3' = 0, b_1 = b, c_1 = c_1' = c, d_1 = d, d_1' = d'$ — (6)
- 2) i 端滑節, j 端剛結 $a_1 = a, a_2 = a_3 = a_3' = 0, b_1 = b', c_1 = 0, c_1' = c', d_1 = d_1' = 0$ — (7)
- 3) i 端剛結, j 端滑節 $a_1 = a, a_2 = a_3 = a_3' = 0, b_1 = b', c_1 = c', c_1' = 0, d_1 = d', d_1' = 0$ — (8)
- 4) i 端降伏, j 端剛結 降伏端を有する部材の基本式の誘導方法をこの場合を例にとりて紹介する。他の構造部分により拘束された状態では降伏端には弾性変形量 δ_i^e と塑性変形量 δ_i^p が共存し、変形の連続条件より、節変形の変形量 δ_i との間につぎの式(9)の関係が成立する。

$$\delta_i = \delta_i^e + \delta_i^p \quad (9)$$

一方、この塑性変形量 δ_i^p は塑性流れ理論により、前出の G_i と μ_i とからつぎのように表わされる。

$$\delta_i^p = G_i \cdot \mu_i \quad (10)$$

また、曲げと軸力の組み合わせを考えた降伏条件式 $f(N, M) = 1$ では式(10)の G_i は式(11)となる。

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} \\ \frac{\partial f}{\partial Q} \\ \frac{\partial f}{\partial M} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial M} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ 0 \\ \beta_i \end{bmatrix}, \quad \alpha_i = \left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)_i, \quad \beta_i = \left(\frac{\partial f}{\partial M} \right)_i \quad (11)$$

この場合の S と δ の関係は式(3)の δ_i がわりの δ_i^e を代入したものとなり、整理すればつぎの式(12)となる。

$$S_i = K_{ii} \cdot \delta_i + K_{ij} \cdot \delta_j - K_{ii} \cdot G_i \cdot \mu_i, \quad S_j = K_{ji} \cdot \delta_i + K_{jj} \cdot \delta_j - K_{ji} \cdot G_i \cdot \mu_i \quad (12)$$

つぎに、この材端 i に式(1)の直交条件、 $G_i \cdot S_i = 0$ を適用し、流れ定数 μ_i を求めれば式(13)となる。

$$\mu_i = (G_i \cdot K_{ii} \cdot \delta_i + G_i \cdot K_{ij} \cdot \delta_j) (G_i \cdot K_{ii} \cdot G_i)^{-1} \quad (13)$$

ここで、 $(G_i^* \cdot K_{ii} \cdot G_i)^{-1}$ は式(4)の K_{ii} に式(6)を代入し、計算すればつぎの式(14)のよう定義 T_i となる。

$$T_i = (G_i^* \cdot K_{ii} \cdot G_i)^{-1} = (a\alpha_i^2 + d\beta_i^2)^{-1} \quad (14)$$

なお、式(13)の μ_i の正負によって弾性復元の判定ができる。 $(\mu_i > 0)$: 塑性持続, $(\mu_i < 0)$: 弾性復元
式(13)を式(12)に代入し、整理すれば、求める S と δ の関係が得られ、Stiffness matrix の各要素が式(15)のよう

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= ad\beta_i^2 T_i, a_2 = ac\alpha_i\beta_i T_i, a_3 = ad\alpha_i\beta_i T_i, a_4 = ad'\alpha_i\beta_i T_i, b_1 = b - c^2\beta_i^2 T_i \\ c_1 &= ac\alpha_i^2 T_i, c_1' = c(1 - d'\alpha_i^2 T_i), d_1 = ad\alpha_i^2 T_i, d_1' = ad'\alpha_i^2 T_i, d_2' = d - d'^2\beta_i^2 T_i \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

に求まる。同様にして他の降伏端部材の S と δ の関係も求められるが、以下にはその結果だけを示す。

$$\left. \begin{aligned} 5) \text{ i 端剛結, j 端降伏 } a_1 &= ad\beta_j^2 T_j, a_2 = -ac\alpha_j\beta_j T_j, a_3 = ad\alpha_j\beta_j T_j, a_4 = ad'\alpha_j\beta_j T_j \\ b_1 &= b - c^2\beta_j^2 T_j, c_1 = c(1 - d'\alpha_j^2 T_j), c_1' = ac\alpha_j^2 T_j, d_1 = d - d'^2\beta_j^2 T_j, d_1' = ad'\alpha_j^2 T_j, T_j = (\alpha_j^2 + d\beta_j^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} 6) \text{ i 端滑節, j 端降伏 } a_1 &= ad'\beta_j^2 T_j, a_2 = -ac'\alpha_j\beta_j T_j, a_3 = 0, a_4 = -ad'\alpha_j\beta_j T_j \\ b_1 &= ab'\alpha_j^2 T_j, c_1 = 0, c_1' = ac'\alpha_j\beta_j T_j, d_1 = d_1' = 0, T_j = (\alpha_j^2 + d'\beta_j^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} 7) \text{ i 端降伏, j 端滑節 } a_1 &= ad'\beta_i^2 T_i, a_2 = ac'\alpha_i\beta_i T_i, a_3 = ad'\alpha_i\beta_i T_i, a_4 = 0 \\ b_1 &= ab'\alpha_i^2 T_i, c_1 = ac'\alpha_i^2 T_i, c_1' = 0, d_1 = ad'\alpha_i^2 T_i, d_1' = 0, T_i = (\alpha_i^2 + d'\beta_i^2)^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} 8) \text{ i 端降伏, j 端降伏 } a_1 &= 3ad'\beta_i^2\beta_j^2 T_{ij}, a_2 = ac\beta_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)T_{ij}, a_3 = 3ad'\alpha_i\beta_i\beta_j^2 T_{ij} \\ a_4 &= -3ad'\alpha_j\beta_j^2\beta_i T_{ij}, b_1 = ab(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)^2/2, c_1 = ac\alpha_i\beta_j(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)T_{ij}, c_1' = -ac\alpha_j\beta_i(\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i)T_{ij} \\ d_1 &= 3ad'\alpha_i^2\beta_j^2 T_{ij}, d_1' = -3ad'\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j T_{ij}, T_{ij} = \{2a(\alpha_i^2\beta_j^2 + \alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j + \alpha_j^2\beta_i^2) + 3d'\beta_i^2\beta_j^2\}^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

以上の諸式は部材軸と弓軸を一致させた固有座標系 ξ 系に対するものであるが、一般座標 x 系に対する関係も後述するような座標変換により簡単に求められる。

5. ベフトル移動による材端力の減少 3. で述べたような線形近似を行なうためには、ある荷重強度 $\bar{P}$ で材端 i が降伏した場合、荷重 $\bar{P}$ を増加する以前に、式(2)に示す応力ベクトルの移動を行なう必要があるが、その場合の材端力の減少量はつぎのようにして求められる。すなわち、荷重強度 $\bar{P}$ のもとでの釣合状態は材端 i が降伏しても $\bar{P}$ に変化がなければそのまま保たれると仮定すれば変形の連続条件から材端 i で $d\delta_i^E + d\delta_i^P = 0$ (20)

となる。したがって、部材 i, j の材端力 S_i, S_j は式(20)の弾性変形量 $d\delta_i^E = -d\delta_i^P = -G_i \cdot \mu_i$ により、

$$dS_i = K_{ii} \cdot d\delta_i^E = -K_{ii} G_i \mu_i, dS_j = K_{ji} \cdot d\delta_i^E = -K_{ji} G_i \mu_i \quad (21)$$

だけ変化し、この dS_i を式(21)に代入すると、定数 μ_i が、 $\mu_i = (G_i^* \cdot K_{ii} \cdot G_i)^{-1} h = T_i \cdot h$ (22)

として求まるから、これを式(21)に代入すれば、求める材端力の減少量 dS_i, dS_j は式(23)のようになる。

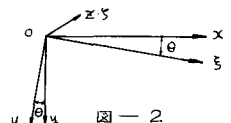
$$dS_i = -K_{ii} G_i T_i h, dS_j = -K_{ji} G_i T_i h \quad (23)$$

なお、式(22), (23)の Stiffness matrix K_{ii}, K_{ji} は材端 i の降伏前の値を用いることが必要であり、 i, j 両端が同時に降伏した場合には i, j 両端で得られる式(23)の結果を加算したものとなるが、これらの dS_i, dS_j の減少により節点 i, j の釣合状態がみだされることになるから再配分を考える必要がある。

6. 座標変換 4., 5. で求めた固有座標系 ξ に対する S と δ の関係は座標変換行列 R によって、一般座標系 x に対するこれらの関係 P と V に式(24)によって変換される。

$$P = R \cdot S = R \cdot K \cdot \delta = R \cdot K R^T V, (\delta = R^T V) \quad (24)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ M \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \theta \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$



7. 降伏条件式 降伏条件に曲げと軸力の組み合わせを考えた場合の矩形, 対称I型および薄肉中空円形断面に対する降伏条件式はつぎの式(26), (27)のように表わされるから, 前述の外向き法線ベクトル

$$f(N, M) = R(M/M_P) + N/N_0 = 1 \quad (26), \quad f(N, M) = M/M_P + R(N/N_0) = 1 \quad (27) \quad \text{※: 定数}$$

に G_i の各成分 α, β はそれぞれつぎの式(28), (29) のような定数あるいは N の1次式となる。

$$\alpha = \partial f / \partial M = R/M_P, \quad \beta = \partial f / \partial N = 1/N_0 \quad (28), \quad \alpha = \partial f / \partial M = 1/M_P, \quad \beta = \partial f / \partial N = 2R(N/N_0) \quad (29)$$

8. 解析手順 本文による塑性解析は

つぎの1)~6)の繰返しによって進められる。1)線形解析, 2)弾性復活の判定, 3)荷重倍数の計算, 4)降伏端にかけるベクトル移動, 5)stiffness matrixの修正, 6)崩壊の判定。なお, この場合の解析プログラムにかける演算の流れは図-3のようになる。

9. 問題点 本法には, 1)降伏閾値が完全に剛性を失わず, 変形機構が形成されないため崩壊の定義が明確でない。2)降伏材端でのベクトル移動量 $\delta x, \delta y$ により解析結果の精度が左右される。などの問題点があり, 1)については変形量などから判定可能と思われるが, これら

の点については解析プログラム完成後, 計算結果を参考としながら検討してゆく予定である。

10. 参考文献

- 1) PHILIP G. HODGE: "PLASTIC ANALYSIS OF STRUCTURES", MCGRAW-HILL
- 2) 星 児嶋 平尾: 「有限変位を考慮した平面構造物の崩壊過程の自動追跡について」, 土木学会 第24回年次学術講演会講演集 第1部 P.51~54.
- 3) 星 児嶋 平尾: 「曲げモーメントと軸力の組み合わせを考慮した平面構造物の一塑性解析」, 徳島大学工学部研究報告 第16号 P.17~34
- 4) 星 児嶋 平尾: 「格子桁の崩壊過程の追跡について」, 土木学会 第23回年次学術講演会講演集
- 5) 若林 野中 杯: 「架橋の塑性崩壊荷重に及ぼす部材軸力の影響について」, 日本建築学会近畿支部研究報告集 昭和45年5月 P.69~72
- 6) 米沢 三上: 土木学会論文集, No.132, 1966, P.18~26
- 7) Glenn A. Morris, Steven J. Fenves: "ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF FRAMEWORKS" STRUCTURAL DIVISION, May 1970, P.931~946
- 8) フラガー, ホッジ: 「塑性学」, 安部浩二, 宮本博訳, 丸善

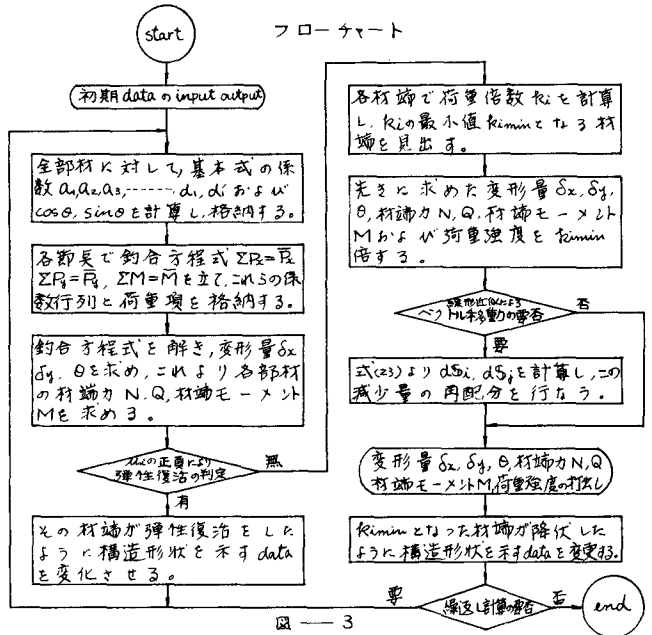


図-3