

## I-42 高次不静定棒構造物の耐荷能力の追跡について

徳島大学工学部 正員 星 治雄

〇 児嶋弘行

平尾 潔

### 1 はしがき

漸増する荷重強度を受ける構造物がたどる崩壊の経路を、弾性歪曲と杆構化の両面から考察すると、

a) 部分的な部材に歪曲もしくは塑性化が生じ、これが他の残存部材にも段階的に波及していつて、安定な構造から次第に不安定な構造へと移行して最終的に杆構を形成して崩壊する場合、b) 杆構化の進行途上の段階(構造形式が原形式から幾分変化した状態)で不安定現象を生じて崩壊する場合、および、c) 杆構化が全々進行していない段階(構造形式が原形式のままの状態)で不安定現象を生じて崩壊する場合、などが考えられ、特に高次不静定構造物の場合には一般的にa)、b) の場合が多く起るものと考えられる。本報告は、高次不静定構造物の設計に際して、このような崩壊の経路に対する配慮を導入するための基礎的研究として平面剛滑節棒構造物を対象にして、その崩壊の形式、ならびに、経過とこれに対応した耐荷能力などを電子計算機によって自動的に解析することを試み、二、三の例題について考察したものである。

### 2 解析法の概要

第24回大会において著者の一人が、斜腹材をもつアーチ系構造物の極限荷重を塑性解析と安定解析の両面から検討した場合について報告したが、その場合に用いた解析の手順は以下のようである。

すなわち、まず、i) 内力追跡法による塑性解析を行なって段階的な杆構化の過程とその都度の荷重強度、断面力などを求め、ついで、ii) i) で得た杆構化の各段階に対して、当該段階に対して得られている荷重強度、断面力などを初期値として安定解析を行ない、杆構化が次の段階に移行するまでの間に不安定現象が生じるか否かを検討する。iii) i) とii) の結果を比較して崩壊を生じさせる最小荷重強度をもって極限荷重と考える。のである。しかしこの方法は、塑性解析と安定解析とを別個に行なっているため膨大な計算時間を必要とする上、内力追跡法における弾性計算を線形理論で行なっているにもかかわらずその結果を安定解析の初期値として用いている点、塑性解析において組合せ応力に対する配慮を省略している点など改良すべき多くの問題点を含んでいる。そこで今回は、上述の問題点のうち組合せ応力の問題については別に検討することとし、残りの点については、内力追跡法における弾性計算の部分で、安定解析に用いる非線形の材端力—変位関係を用いて計算することによって、塑性解析と安定解析とを同時に平行して行なうとともに、有限変位理論を新たに加味して解析することによって解決することを試みた。このようにした場合の解析手順の概略を示すと以下のようである。すなわち、与えられた構造物と荷重群について 1) 任意の荷重強度  $P$  を与えて線形弾性解析を行ない、断面力、変形量などを求める。2) 後述の線形近似した非線形弾性解析にもとづく荷重倍数の求め方にしたがって最小荷重倍数を求め、最初の歪曲もしくは塑性化部材の発生する荷重強度  $P_0$  と断面力、変形量などを決定する。この際、荷重倍数を収束させるための繰返し計算の途上において、釣合方程式の行列式の値より不安定現象の発生に対する判定を行ない、 $P_0$  よ

り小さな荷重強度で不安定化するような場合にはその値をもって極限荷重とする。3) 2) の結果にもとづいて構造形式を変更し、解析手順の原典をこの新たな構造形式に移して  $P_0$  より大きな任意の荷重強度のもとで 1), 2) と同様な手順で解析を行なう。以上を繰り返して続行することによってはしがきに述べた a) ~ c) の崩壊の経路を判別し、それぞれに対応した極限荷重ないしは崩壊途上の各段階における耐荷能力などを自動的に知ることができる。

### 3 線形近似による荷重倍数の決定法

いま、構造物の崩壊途上におけるある段階に注目し、杆構化の一段階が終了して新たな構造形式に移行した時点での荷重強度を  $P_0$  とし、 $P_0$  のもとで注目した部材に生じている応力を  $\sigma_0$  とし、これらを原典にした図-1 のような  $P-\sigma$  座標系を考え、この部材の屈服ないしは降伏点応力を  $\sigma_c$  として、それに対応する荷重強度を  $P_c$  とし、以下のようにして  $P_0$  を  $P_c$  に上げるための荷重倍数を計算する。すなわち、1) まず、 $P_0$  より大きい任意の  $P_1$  を想定し  $P$

で線形計算を行ない、全部材の断面力と全節点の変形量を求める。

ロ) 荷重倍数の第1近似値  $\alpha_1 = (\sigma_c - \sigma_0) / (\sigma_1 - \sigma_0)$  を全部材について計算し、これらのうちの最小の荷重倍数  $\alpha_{1min}$  を見出す。ハ) 1) で求めた断面力、変形量などを  $\alpha_{1min}$  倍し、これらの値を用いて非線形釣合方程式を立て、荷重  $P_2 = \alpha_{1min}(P_1 - P_0) + P_0$  に対する非線形解の第1近似値を求める。以下、ロ) ハ) の手順を繰り返す。オ) 回目については、 $\alpha_i = (\sigma_c - \sigma_{i-1}) / (\sigma_i - \sigma_{i-1})$ 、 $P_{i+1} = \alpha_{imin}(P_i - P_{i-1}) + P_{i-1}$  によって荷重倍数と荷重強度を求め、 $\alpha_{imin} \div 1$ 、または、 $P_{i+1} \div P_i$  となった時点で  $P_c = P_i$  によって新たな屈服もしくは塑性

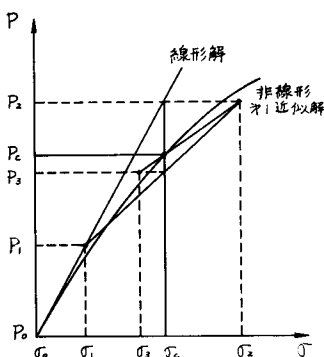


図-1 線形近似による収束

化部材が発生したものとしてこの段階の計算を終了する。なお、不安定現象の発生に対する判定は以上の繰り返し計算中において常に行ない、釣合方程式の行列式の符号が変化した場合には適当に荷重強度を低下させて  $\Delta \div 0$  になる荷重強度  $P_0$  を求め、 $P_0 \geq P_c$  を判定して杆構化に対する計算を続行するか打切るかを決定する。

### 4 弾性計算に用いた基本式

上述のような解析法によると、杆構化の進行途上の各段階ごとに前段階より変化した構造形式に対する線形および非線形弾性計算が必要であるが、著者らはこの計算に変形法を用いたのて以下にその基本式を各種の杆端条件に応じて示す。

#### 1) 両端剛節部材に対する基本式

$$P_{xij} = a(u_i - u_j) + b(v_i - v_j) + c(\theta_i + \theta_j),$$

$$P_{yij} = b(u_i - u_j) + \bar{a}(v_i - v_j) + \bar{c}(\theta_i + \theta_j),$$

$$M_{ij} = c(u_i - u_j) + \bar{c}(v_i - v_j) + d\theta_i + \bar{d}\theta_j,$$

#### 2) i 端滑節, j 端剛節部材に対する基本式

$$P_{xij} = a'(u_i - u_j) + b'(v_i - v_j) + c'\theta_j,$$

$$P_{yij} = b'(u_i - u_j) + \bar{a}'(v_i - v_j) + \bar{c}'\theta_j,$$

$$M_{ij} = 0$$

$$a = \frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \left( \frac{q_r}{q_s} \right) \sin^2 \alpha,$$

$$\bar{a} = \frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{l^3} \left( \frac{q_r}{q_s} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$b = \left\{ \frac{EF}{l} - \frac{12EI}{l^3} \left( \frac{q_r}{q_s} \right) \right\} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$c = -\frac{6EI}{l^2} \left( \frac{q_2}{q_s} \right) \sin \alpha,$$

$$\bar{c} = \frac{6EI}{l^2} \left( \frac{q_2}{q_s} \right) \cos \alpha,$$

$$d = \frac{4EI}{l} \left( \frac{q_1}{q_s} \right),$$

$$\bar{d} = \frac{2EI}{l} \left( \frac{q_1}{q_s} \right),$$

3) i端剛節, j端滑節部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a'(u_i - u_j) + b'(v_i - v_j) + c' \cdot \theta_i, \\ P_{yij} &= b'(u_i - u_j) + \bar{a}'(v_i - v_j) + \bar{c}' \cdot \theta_i, \\ M_{ij} &= c'(u_i - u_j) + \bar{c}'(v_i - v_j) + d' \cdot \theta_i. \end{aligned}$$

4) 両端滑節部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= \bar{a}''(u_i - u_j) + \bar{b}''(v_i - v_j), \\ P_{yij} &= \bar{b}''(u_i - u_j) + \bar{a}''(v_i - v_j). \end{aligned}$$

5) i端塑性関節, j端剛節部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a'(u_i - u_j) + b'(v_i - v_j) + c' \cdot \theta_j - M_{ij} \left( \frac{g_j}{g_i} \right) \sin \alpha / l, \\ P_{yij} &= b'(u_i - u_j) + \bar{a}'(v_i - v_j) + \bar{c}' \cdot \theta_j + M_{ij} \left( \frac{g_j}{g_i} \right) \cos \alpha / l, \\ |M_{ij}| &= M_p. \end{aligned}$$

6) i端剛節, j端塑性関節部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= a'(u_i - u_j) + b'(v_i - v_j) + c' \cdot \theta_i - M_{ji} \left( \frac{g_i}{g_j} \right) \sin \alpha / l, \\ P_{yij} &= b'(u_i - u_j) + \bar{a}''(v_i - v_j) + \bar{c}' \cdot \theta_i + M_{ji} \left( \frac{g_i}{g_j} \right) \cos \alpha / l, \\ M_{ji} &= c'(u_i - u_j) + \bar{c}'(v_i - v_j) + d' \cdot \theta_i + M_{ji} \left( \frac{g_i}{g_j} \right), \\ |M_{ji}| &= M_p. \end{aligned}$$

7) 両端塑性関節部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= \bar{a}''(u_i - u_j) + \bar{b}''(v_i - v_j) - (M_{ij} + M_{ji}) \sin \alpha / l, \\ P_{yij} &= \bar{b}''(u_i - u_j) + \bar{a}''(v_i - v_j) + (M_{ij} + M_{ji}) \cos \alpha / l, \\ |M_{ij}| &= M_p, \quad |M_{ji}| = M_p. \end{aligned}$$

8) 全塑性軸力部材に対する基本式

$$\begin{aligned} P_{xij} &= N_{ij} \cos \alpha - (M_{ij} + M_{ji}) \sin \alpha / l, \\ P_{yij} &= N_{ij} \sin \alpha + (M_{ij} + M_{ji}) \cos \alpha / l, \\ |N_{ij}| &= N_p, \quad M_{ij} = M_{oij}, \quad M_{ji} = M_{oji}. \end{aligned}$$

なお, 上式中,

$M_p$  :- 部材  $ij$  の全塑性モーメント,

$N_p$  :- 部材  $ij$  の全塑性軸方向力,

$M_{oij}, M_{oji}$  :- 部材  $ij$  が全塑性軸力材と

$$a' = \frac{EF}{l} \cos^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \left( \frac{g_j}{g_i} \right) \sin^2 \alpha,$$

$$\bar{a}' = \frac{EF}{l} \sin^2 \alpha + \frac{3EI}{l^3} \left( \frac{g_i}{g_j} \right) \cos^2 \alpha,$$

$$b' = \left\{ \frac{EF}{l} - \frac{3EI}{l^3} \left( \frac{g_i}{g_j} \right) \right\} \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$c' = - \frac{3EI}{l^3} \left( \frac{g_j}{g_i} \right) \sin \alpha,$$

$$\bar{c}' = \frac{3EI}{l^3} \left( \frac{g_i}{g_j} \right) \cos \alpha, \quad d' = \frac{3EI}{l} \left( \frac{g_j}{g_i} \right),$$

$$a'' = \frac{EF}{l} \cos^2 \alpha, \quad \bar{a}'' = \frac{EF}{l} \sin^2 \alpha,$$

$$b'' = \frac{EF}{l} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$g_3 = (3g_2 + g_1) / 4,$$

$$\bar{g}_3 = (3\bar{g}_2 + \bar{g}_1) / 4,$$

$$g_4 = (3g_2 - g_1) / 2,$$

$$\bar{g}_4 = (3\bar{g}_2 - \bar{g}_1) / 2,$$

$$g_5 = g_1 \cdot g_2,$$

$$\bar{g}_5 = \bar{g}_1 \cdot \bar{g}_2,$$

$$g_6 = 4g_5 - 3g_2^2 / g_3,$$

$$\bar{g}_6 = 4\bar{g}_5 - 3\bar{g}_2^2 / \bar{g}_3,$$

$$g_7 = g_6 / g_3,$$

$$\bar{g}_7 = \bar{g}_6 / \bar{g}_3,$$

$$g_8 = 3g_7 / 2g_3,$$

$$\bar{g}_8 = 3\bar{g}_7 / 2\bar{g}_3,$$

$$g_9 = g_8 / 2g_3,$$

$$\bar{g}_9 = \bar{g}_8 / 2\bar{g}_3,$$

$$g_1 = \frac{\lambda l \sin \lambda l}{2(1 - \cos \lambda l)}, \quad \bar{g}_1 = \frac{\lambda l \sinh \lambda l}{2(\cosh \lambda l - 1)},$$

$$g_2 = \frac{\lambda^2 l^2}{6} \left\{ \frac{1 - \cos \lambda l}{2(1 - \cos \lambda l) - \lambda l \sin \lambda l} \right\},$$

$$\bar{g}_2 = \frac{\lambda^2 l^2}{6} \left\{ \frac{1 - \cosh \lambda l}{2(\cosh \lambda l - 1) - \lambda l \sinh \lambda l} \right\},$$

$$\sin \alpha = \{(y_j - y_i) + (v_j - v_i)\} / l,$$

$$\cos \alpha = \{(x_j - x_i) + (u_j - u_i)\} / l,$$

$$l = \sqrt{\{(x_j - x_i) + (v_j - v_i)\}^2 + \{(y_j - y_i) + (u_j - u_i)\}^2},$$

なったときその両端に作用していた枝端モーメント, であり,  $g, \bar{g}$  については,  $\lambda = \sqrt{|N|/EI}$  を用いて計算し,  $N$  の正負によって  $g$  と  $\bar{g}$  とを使いやるものとする。

5. 計算枠の行なう演算の流れ

著者が作成した解析プログラムにおける演算の流れの概略を示すと図-2 のようであるが, 紙面の都合上その説明は講演会の当日に補足する。

6. 計算例

紙面の都合上, ここでは解析法や荷重倍数の収束方法の相違による解析結果の相違について検討するに行なった図-3 のような簡単な Z ヒンジアーチに対する計算結果を示し, やゝ複雑な構造に

については当日補足する。

例題の場合、崩壊の経路は図-4のような段階を経て杆構を構成して崩壊する(α)の形式に属し、各段階での荷重強度と収束に必要な繰返し計算の回数とは表-1のようになる。表-1において、非線形解析の結果のうちA欄は、本文の3.で述べた繰返し計算法による場合で、B欄は、本文の3.ロ)において非線形解を第1近似値で止めないで収束解を得るまで計算した場合であり、C欄は、荷重倍数の収束値をラグランジュの補間法によって求めた場合の結果である。

#### 7. おわりに

ここに示した簡単な例から非線形解析は本文の場合に比較して耐荷能力ないしは極限荷重を過大に評価する恐れのあることがわかり、さらに、荷重倍数の決定は本文のように線形近似して行なっても充分な精度が期待でき、しかも、マシントイムの短縮に有効なことがわかる。なお、本研究は昭和45年度科学研究費(一般研究・D)の援助を得て行なったものであることを附記する。

表-1 崩壊途上の荷重強度と繰返回数

| 段階 | 線形解析 | 非線形解析   |        |        |
|----|------|---------|--------|--------|
|    |      | A       | B      | C      |
| 1  | 荷重強度 | 58.558t | 56.995 | 56.995 |
|    | 繰返回数 | 1       | 4      | 13     |
| 2  | 荷重強度 | 72.960t | 68.370 | 68.370 |
|    | 繰返回数 | 1       | 5      | 11     |

#### 参考文献

児嶋：『斜吊架を有するアーチ系構造物の極限荷重について』第24回大会講演概要集

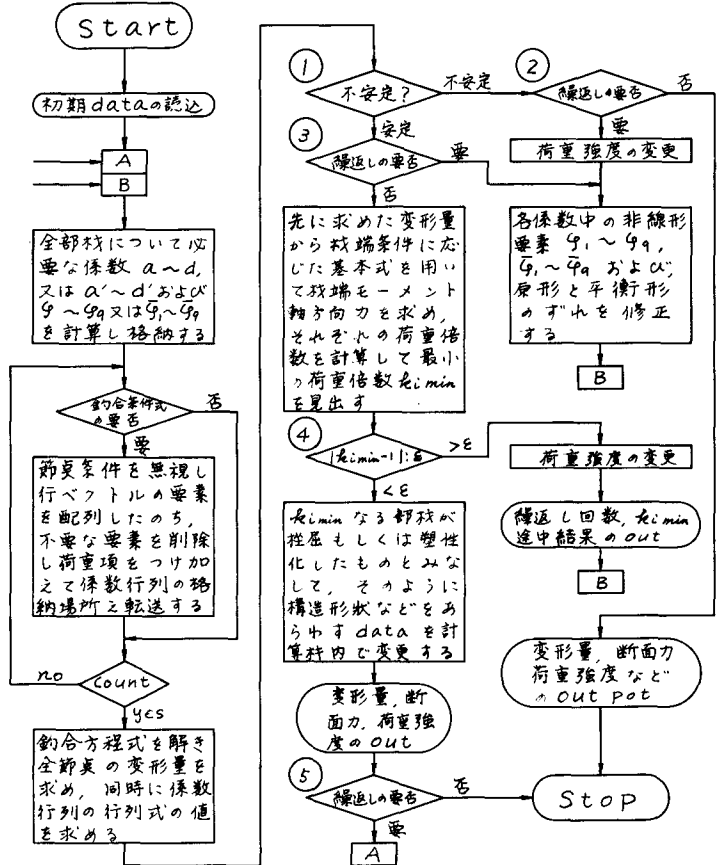


図-2 演算のフロー図

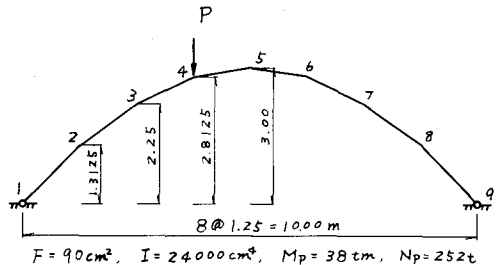


図-3 計算例骨組図

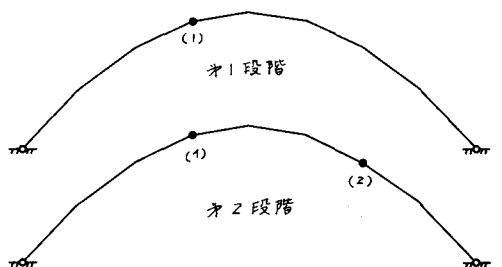


図-4 崩壊過程