

I-37 連続ばりの弾塑性安定問題の解法

九州大学 正夏 橋本 武
学頭 林田紀雄

1 緒言

本研究は、骨組構造物の弾塑性安定問題の近似解法の確立を企図したものである。すなわち、板構造のモデル化の一手法として提案された“Newmark's plate analog”の概念を拡張適用して部材が剛棒と弾塑性ヒンジとで構成される beam analog なるもの (bar-hinge system) に置き換えて骨組構造物の弾塑性安定問題の基礎式を誘導する。ついで、えられた基礎式を連続ばりに適用して数値計算を行い、その弾塑性安定上の特性を把握するものである。

2 基礎式の誘導

本法では、図-1 に示すように部材を適当な間隔に分割し、分割点を弾塑性ヒンジに、また分割点間を剛棒に置き換えてモデル化し、このようにモデル化したものを bar-hinge system と名付ける。このとき、bar-hinge system は次のような性質をもつものと仮定する。

- (1) 剛棒は重さがなく変形しない。
- (2) 荷重はヒンジ部に集中して作用する。
- (3) 弾塑性ヒンジの部材軸方向の寸法は零である。
- (4) 応力とひずみはヒンジ部のみ生じ、それらの値はヒンジを挟む両区間の平均値と解釈する。

軸力 N が一定の場合には、剛棒 $i(i+1)$ に関するモーメントの釣り合い式が次のようにえられる。

$$V_{i(i+1)} = (M_{i+1} - M_i) / l - N (w_{i+1} - w_i) / l \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $V_{i(i+1)}$: 剛棒 $i(i+1)$ のせん断力、 M_i : ヒンジ i におけるモーメントでヒンジを中心とする区間 l の平均値、 l : 剛棒の長さ、 w_i : ヒンジ i のたわみ。

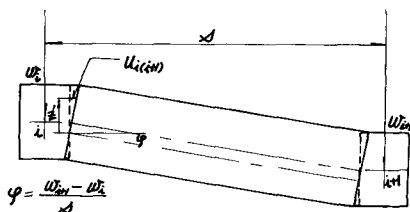
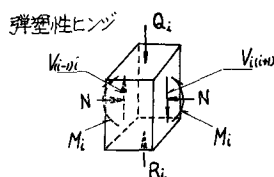
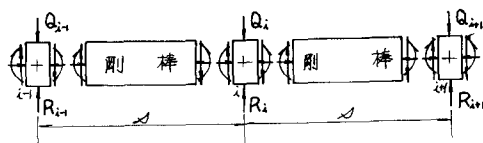
また、ヒンジ i における力の釣り合い式は、

$$V_{i-1i} - V_{i(i+1)} = Q_i - R_i$$

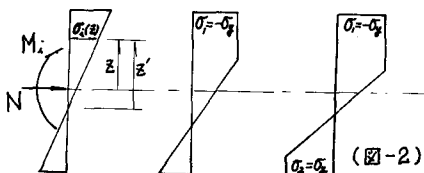
ここに、 Q_i : ヒンジ i に作用する荷重、 R_i : 中間支反による反力。

上式に式(1)を代入すれば、

$$M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1} - N (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) = -l (Q_i - R_i) \quad \text{----- (2)}$$



(図-1)



(1) 弾性状態 (2) 第1弾塑性状態 (3) 第2弾塑性状態

一方、ヒンジのひずみは、 $\epsilon_i = (u_{i+1}) - u_{i-1})/s$ 。ここに、 u_{i+1} , u_{i-1} : $i-1$ 区間および $i+1$ 区間のヒンジ i における軸方向変形長。

よって、 $u_{i+1} - u_i = (w_{i+1} - w_i)z'/s$, $u_{i-1} - u_i = (w_{i-1} - w_i)z'/s$ であり、から結局 ϵ_i として次式を得る。

$$\epsilon_i = (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})z'/s = -\phi_i z'$$

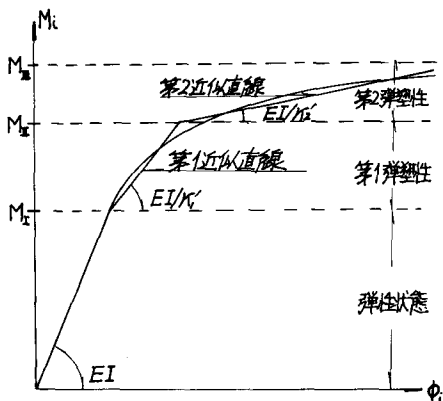
よって、 $\phi_i = (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})/s^2$ (曲率)。 z' : 断面の中立軸からの位置。

$\sigma_i - \epsilon_i$ の関係として、Jesek の理想塑性体を仮定する。したがって、応力 $\sigma_i(z')$ は、

$$\sigma_i(z') = \begin{cases} E(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1})z'/s^2 & \dots\dots \text{[弾性域]} \\ \pm \sigma_y & \dots\dots \text{[塑性域]} \end{cases}$$

但し、 E : ヤング率、 σ_y : 降伏応力。

部材断面が矩形 ($A = b \times h$) とするとき、断面が弾性状態、第1弾塑性状態および第2弾塑性状態の各応力状態 (図-2 参照) に対するモーメント M_i とたわみ w_i との関係が、次のように算定される (但し、 z : 断面の中心軸からの距離)。なお、第1・第2弾塑性状態においては $M_i - \phi_i$ 曲線は非線型となるが、エネルギー等値条件を使って2本の近似直線 (図-3) に置換し、変算の簡略化を行なった。



(図-3)

$$M_i = \sigma_i - \beta_i (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \quad \dots\dots (4)$$

但し、

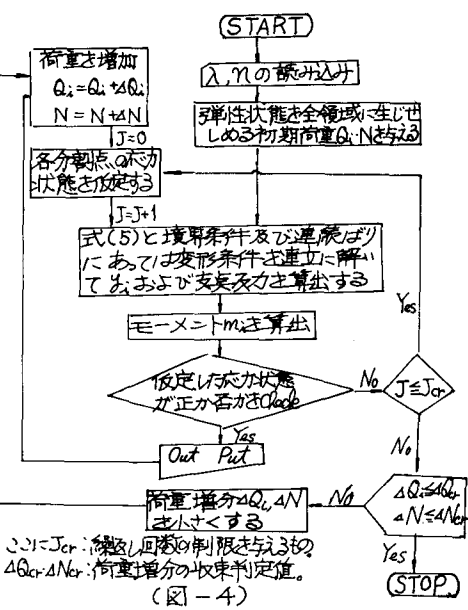
$$\beta_i = \begin{cases} 0 \\ \pm (1 - 1/K_1') M_i \\ \pm \{ (1 - K_1'/K_2') M_{II} + (K_1'/K_2') (1 - 1/K_1') M_i \} \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \eta^2/2 & \dots\dots \text{[ヒンジが弾性状態]} \\ \eta^2/(K_1\alpha^2) & \dots\dots \text{[第1弾塑性状態]} \\ \eta^2/(K_2\alpha^2) & \dots\dots \text{[第2弾塑性状態]} \end{cases}$$

よって、 $M_i = M_{II}/N\eta$ であり、また M_i , M_{II} , M_{II} は弾性状態、第1弾塑性状態、第2弾塑性状態の限界モーメント M_{II} , M_{II} , M_{II} を無次元化したもの、 $M_{II} = (\sigma_y/\sigma_0 - 1)/6$, $M_{II} = (2\sigma_0/\sigma_y + 1)M_{II}$, $M_{II} = (\sigma_y/\sigma_0)(1 - \sigma_0^2/\sigma_y^2)/4$ である。 K_1' , K_2' は第1・第2近似直線の勾配を表わし、エネルギー等値条件より次のごとく表わされる。

$$\begin{cases} K_1 = (M_{II}^2 - M_{II}^2 + 2M_{II}/3)/(M_{II} - M_{II})^2, & K_1' = K_1 + 1 \\ K_2 = \{ M_{II}^2 - M_{II}^2 - K(M_{II} - M_{II})^2 + 2M_{II}/3 \\ \quad + M_{II}\sqrt{1 - M_{II}/M_{II}}/3\sqrt{\sigma_0^2(1 - \sigma_0^2/\sigma_y^2)/4\sigma_y^2} \} / (M_{II} - M_{II})^2 \\ K_2' = K_2 + K_1' \end{cases}$$

また、 $y_i = w_i/r$, $\sigma_0 = N/A$, n : 分割数, $s = l/n$, λ 細長比, l : 部材長, $\alpha = \sqrt{\sigma_0\lambda}/E$, σ_i の符号: モーメント M_i の正負値と対応する (すなわち、第1・第2弾塑性状態の場合はモーメントの正負値を仮定する必要がある)。



ここに J_{cr} : 繰返し区間の制限値とす。 $\Delta Q_0, \Delta N_0$: 荷重増分の収束判定値。

(図-4)

以上より、式(2)を無次元化してえらる

$$m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1} - (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})) = -\frac{\sqrt{3}\lambda}{6n} \left(\frac{Q_i}{N} - \frac{R_i}{N} \right)$$

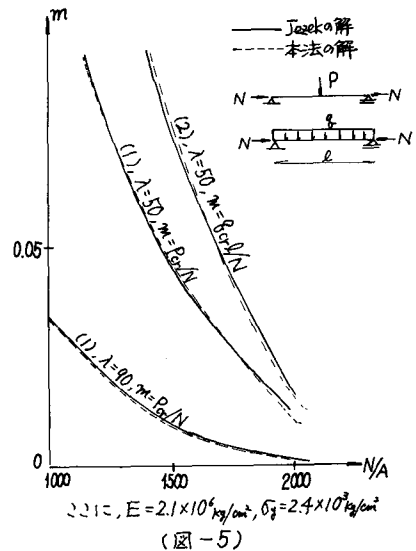
なる式を、式(4)に代入すれば本論の基礎式が得られ次のごとくである。

$$\left. \begin{aligned} A_{i-2} \cdot y_{i-2} + A_{i-1} \cdot y_{i-1} + A_i \cdot y_i + A_{i+1} \cdot y_{i+1} + A_{i+2} \cdot y_{i+2} - \frac{\sqrt{3}\lambda}{6n} R_i &= B_i \\ \text{但し、} A_{i-2} &= \beta_{i-1}, \quad A_{i-1} = 2(\beta_{i-1} + \beta_i) - 1 \\ A_i &= -(\beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1}) + 2, \quad A_{i+1} = 2(\beta_i + \beta_{i+1}) - 1 \\ A_{i+2} &= -\beta_{i+1}, \quad R_i = R_i/N, \quad B_i = -\frac{\sqrt{3}\lambda Q_i}{6nN} - (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

式(5)を各ヒンジ處について求め、それらと境界条件及び連続ばりにおいては変形条件を連立に解くことにより、はりの弾塑性安定に関する限界荷重が算定されることとなるが、その演算プログラムをフロー・チャートに示せば図-4のとおりである。

3 精度の吟味

部材の分割数と精度の関係を3つの具体例(単純ばりに、軸力の他に横荷重としてそれぞれ等分布荷重、中央集中荷重、非対称集中荷重を受ける場合)について検討した結果、 $n=20$ 程度で十分な精度が得られることが確かめられた。また、Jezekの厳密解がえられて、単純ばりに軸力の他に横荷重として(1)中央集中荷重(2)等分布荷重を受ける場合について、Jezekの厳密解と本法による結果と比較すれば図-5に示すとおりである。図より、本法が厳密解と比較的よく一致することがわかり本法の妥当性が十分立証される。



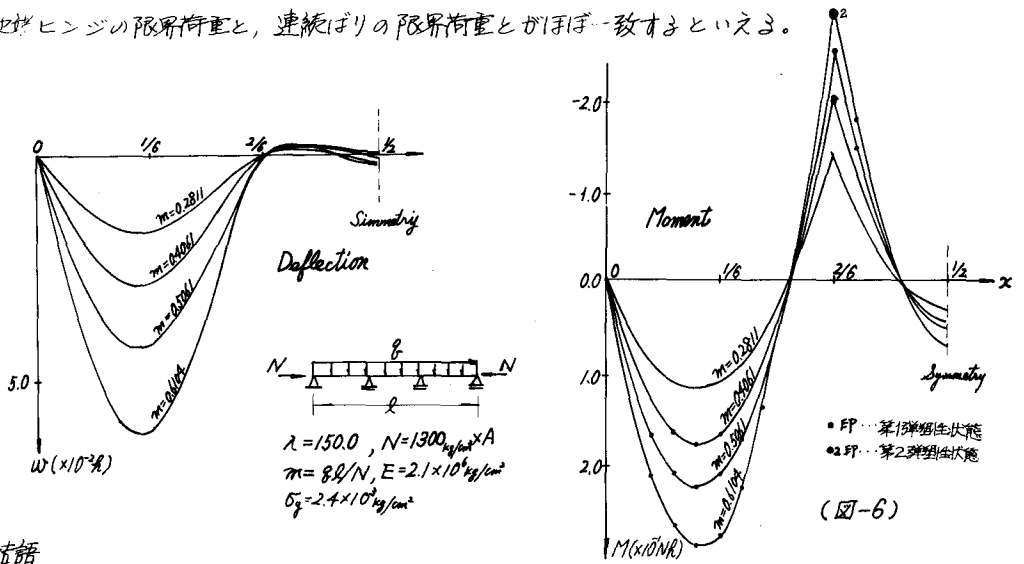
4 連続ばりの弾塑性安定

連続ばりの算例として、2・3スパン連続ばりに等分布荷重が作用する場合および、3スパン中央に

構造形式と荷重状態	N-A		P		q		P	
	$m=8l/N$		$m=P/N$		$m=8l/N$		$m=P/N$	
横荷重 軸力 (N/A)	100	180	100	180	150	270	150	270
1900	0.10946	0.02721	0.03339	0.00773	0.14775	0.02292	0.02728	0.00417
1700	0.19100	0.04999	0.05663	0.01485	0.28775	0.04458	0.04970	0.00813
1500	0.27400	0.09515	0.07828	0.02897	0.43775	0.08053	0.07398	0.01550
1300	0.36700	0.15100	0.11310	0.04641	0.6104	0.17303	0.10290	0.03280
1100	0.48000	0.22000	0.15110	0.06815	—	0.30646	0.14519	0.05431

$E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
 $G=2.4 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$
 (表-1)

集中荷重が作用する場合について、極限状態における軸力と横荷重の関係は求めれば表-1のごとくである。また、荷重増加の各段階におけるモーメント、ひねみの変化の一例を示せば図-6のとおりである。なお、2スパン連続ばりに関しては左右のスパンをきりはなし、中間支承を固定とし、端部の支点をヒンジとした1スパンばりの場合に全く同じ状態であることはいふまでもない。3スパン連続ばりは、各スパンをきりはなし、中間支承を固定とし、それぞれ1スパンばり（両端スパンは一端固定・他端ヒンジ、中央スパンは両端固定）として計算しなうちで、小さい限界荷重を与える一端固定・他端ヒンジの限界荷重と、連続ばりの限界荷重とがほぼ一致するといえる。



5. 結語

本研究は、bar hinge system により部材をモデル化することによって、一般に数学的方法によって導かれる弾塑性安定問題の基礎方程式を、力学的な把握から誘導することと可能ならしめたものである。基礎式の誘導にあたり、これは軸力 N を一定としたが、部材中間に柱が結合したり、あるいは中間軸荷重が作用する場合など、必ずしも N が一定でない場合についても簡単に応用拡張が可能である。また変形の影響を考慮し、あるいは、 $M-\phi$ 曲線に定式に沿ってより厳密な解析も可能であり、さらにラーメンや、数学的取扱いの複雑な板構造やシェル構造、板はり複合構造などの弾塑性安定問題にも本法が適用でき、これらについて近次発表の予定である。

(参考文献)

- 1) A. Ang ; The development of a distribution procedure for analysis of continuous rectangular plates, American Civil Engineering Studies-Structure Research Report 176, May 1959.