

関西大学工学部 正会員 三上 市蔵

関西大学工学部 正会員 〇赤松 洋一

1. まえがき これまで極異方性扇形板の曲げ座屈について、Galerkin法¹⁾およびFinite Strip Method²⁾による近似解、Frobenius法³⁾およびTaylor展開の中心を変えることによるべき級数法⁴⁾による厳密解を誘導した。これらの解は扇形板に曲げが作用するときに生ずる半径方向の直応力 σ_r は無視でき、また接線方向の直応力 σ_θ は直線ばり理論による分布をすると仮定して得られたものである。扇形板の曲率半径がある程度大きい場合あるいは中心角 α がある程度小さい場合にはこの仮定で十分であるが、曲率半径が小さくなると α が大きくなると σ_θ の分布は直線分布とみなせなくなり、それにともなう σ_r を無視できなくなる。とくにこの σ_r が座屈におよぼす影響は大きい。外縁に圧縮応力が生ずるような曲げモーメントの場合には σ_r は引張応力となり、 σ_r を無視した場合に比べて座屈荷重は大きくなる。逆に内縁に圧縮応力が生ずるような曲げモーメントの場合には σ_r は圧縮応力となり、座屈荷重は小さくなる。そこで、今回は σ_θ の分布を非線形とし、 σ_r を考慮して解析した。平面応力問題としての厳密な σ_r, σ_θ の分布は長方形断面に対しては求められているが、箱形断面やI形断面の腹板のようにフランジの影響を受ける場合にはそのまま適用できない。ここでは大野謙の曲がりばり理論⁵⁾による分布を用いることにした。扇形板の境界条件としては、両直線辺が単純支持され、両曲線辺が単純支持あるいは固定されている場合を考えた。

2. 極異方性扇形板の微分方程式の解

図-1に示すようにI形断面の曲がりばりの腹板を考える。この扇形板が座屈したときのたわみ曲面の微分方程式はつぎのようになる。

$$D_r \left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^3} \right) + 2H \left(\frac{\partial^4 w}{r^2 \partial^2 \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{r^3 \partial r \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} \right) + D_\theta \left(- \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial r^2} + \frac{\partial w}{r^3 \partial r} + 2 \frac{\partial^2 w}{r^4 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \right)$$

$$= N_r \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} + 2N_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} \right) \quad (1)$$

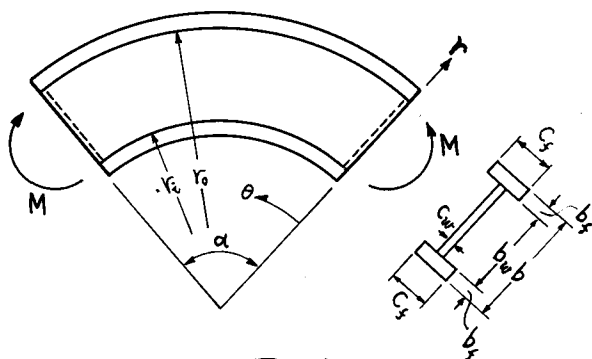


図-1

1) 米沢・三上・武田・赤松：扇形板の曲げ座屈(近似解法)，土木学会年次学術講演会講演集 第1部，B244.9，P.I-24

2) 三上・武田・赤松・米沢：Finite Strip Methodによる扇形板の曲げ座屈，土木学会関西支部年次学術講演会概要集，B245.5，P.I-38

3) 米沢・三上・赤松：扇形板の曲げ座屈，土木学会(関西支部)年次学術講演会概要集，B244.5，P.I-10

4) 三上・赤松・米沢：扇形板の曲げ座屈荷重，土木学会年次学術講演会講演集 第1部，B245.11，P.I-23

5) 大野謙：曲梁の剪断応力度及び半径方向の垂直応力度に対する新公式，土木学会誌 Vol.37, No.7，B27.7，P.18

ただし式(1)は極異方性扇形板に対するもので、 $H = \kappa \sqrt{D_r D_\theta}$ 、 D_r 、 D_θ は半径方向および接線方向の曲げ剛さ、 N_r 、 N_θ は半径方向および接線方向に作用する単位長さ当りの面内引張力、 $N_{r\theta}$ は単位長さ当りのせん断力である。

純曲げが作用する場合を考え、 $N_{r\theta} = 0$ とし、式(1)の解を

$$w = r_0 \sum_{n=1}^{\infty} R(\eta) \sin(n\pi\theta/\alpha), \quad \eta = r/r_0 \quad (2)$$

と仮定し、式(1)に代入するとつぎのようになる。

$$\eta^4 \frac{d^4 R}{d\eta^4} + 2\eta^3 \frac{d^3 R}{d\eta^3} - \eta^2 \frac{d^2 R}{d\eta^2} \left\{ \gamma + \frac{N_r}{D_r} r_0^2 \eta^2 \right\} + \eta \frac{dR}{d\eta} \left\{ \gamma - \frac{N_\theta}{D_r} r_0^2 \eta^2 \right\} - R \left\{ \delta - \frac{N_\theta}{D_r} \psi r_0^2 \eta^2 \right\} = 0 \quad (3)$$

ここに、 $\gamma = 2\kappa\psi\sqrt{D_\theta/D_r} + D_\theta/D_r$ 、 $\delta = \gamma - (D_\theta/D_r)(1-\psi)^2$ 、 $\psi = (m\pi/\alpha)^2$ 。

ここで、 N_r 、 N_θ として大野の曲がりばり公式⁵⁾を用いるとつぎのようになる。

$$N_\theta = \frac{B-\eta}{\eta A} \frac{M}{r_0^2} \quad (4)$$

$$N_r = \frac{E+B\log\eta-\eta}{\eta A} \frac{M}{r_0^2} \quad (5)$$

ここに、

$$A = \left\{ 2 \frac{b_f}{b} \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) + 1 \right\} \left[\frac{1-\vartheta^2}{2} - \frac{\left\{ 2 \frac{b_f}{b} \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) + 1 \right\} (1-\vartheta)^2}{\left[\log \left\{ \vartheta + (1-\vartheta) \frac{b_f}{b} \right\} - \log \left\{ 1 - (1-\vartheta) \frac{b_f}{b} \right\} \right] \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) - \frac{C_f}{C_w} \log \vartheta} \right]$$

$$B = \frac{\left\{ 2 \frac{b_f}{b} \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) + 1 \right\} (1-\vartheta)}{\left[\log \left\{ \vartheta + (1-\vartheta) \frac{b_f}{b} \right\} - \log \left\{ 1 - (1-\vartheta) \frac{b_f}{b} \right\} \right] \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) - \frac{C_f}{C_w} \log \vartheta},$$

$$C = \frac{C_f}{C_w} \log \left(1 + \frac{1-\vartheta}{\vartheta} \frac{b_f}{b} \right) - \log \left\{ \vartheta + (1-\vartheta) \frac{b_f}{b} \right\},$$

$$D = (1-\vartheta) \left(\frac{C_f}{C_w} - 1 \right) \frac{b_f}{b} - \vartheta,$$

$$E = BC - D, \quad \vartheta = \frac{\vartheta_w - (1+\vartheta_w) \frac{b_f}{b}}{1 - (1+\vartheta_w) \frac{b_f}{b}}, \quad \vartheta_w = \frac{r_i}{r_0}.$$

式(4)、(5)を式(3)に代入するとつぎのようになる。

$$\eta^4 \frac{d^4 R}{d\eta^4} + 2\eta^3 \frac{d^3 R}{d\eta^3} - \eta^2 \frac{d^2 R}{d\eta^2} \left\{ \gamma + \mu \eta (E + B \log \eta - \eta) \right\} + \eta \frac{dR}{d\eta} \left\{ \gamma - \mu \eta (B - \eta) \right\} - R \left\{ \delta - \mu \eta (B - \eta) \psi \right\} = 0 \quad (6)$$

ここに、 $\mu = M/D_r A$ である。

式(6)の解としてFrobenius法によると、 $\eta=0$ のまわりに展開したベキ級数解 $R(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \eta^{i+\lambda}$ を用いることができる。しかしこの解は数値計算上桁落ちがひどく実用的でない³⁾。そこで扇形板の中央線 $r = \beta r_0$ 、すなわち $\eta = \beta = (1+\vartheta)/2$ のまわりに展開したベキ級数解 $R(\eta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i (\eta - \beta)^i$ を

式(6)の解として用いることにする。 $\eta = \xi + \beta$ とおくと式(6)は

$$\begin{aligned} & (\xi + \beta)^4 \frac{d^4 R}{d\xi^4} + 2(\xi + \beta)^3 \frac{d^3 R}{d\xi^3} - (\xi + \beta)^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} \left[\gamma + \mu(\xi + \beta) \{ E + B \log(\xi + \beta) - (\xi + \beta) \} \right] \\ & + (\xi + \beta) \frac{dR}{d\xi} \left[\gamma - \mu(\xi + \beta) \{ B - (\xi + \beta) \} \right] - R \left[\delta - \mu(\xi + \beta) \{ B - (\xi + \beta) \} \gamma \right] = 0 \quad (7) \end{aligned}$$

となる。 $\log(\xi + \beta)$ をベキ級数に展開し、式(7)の解を $R = \sum_{i=0}^{\infty} g_i \xi^i$ とおいて、ベキ級数による解法を用いるとつぎのようになる。

$$R = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{0,i} \right) g_0 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{1,i} \right) g_1 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{2,i} \right) g_2 + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \xi^i A_{3,i} \right) g_3 \quad (8)$$

ここに、 $g_0 \sim g_3$ は積分定数で $A_{n,i}$ は $A_{n,-3} = A_{n,-2} = A_{n,-1} = 0$ とし、

$$A_{0,0} = 1, \quad A_{0,1} = A_{0,2} = A_{0,3} = 0$$

$$A_{1,0} = 0, \quad A_{1,1} = 1, \quad A_{1,2} = A_{1,3} = 0$$

$$A_{2,0} = A_{2,1} = 0$$

$$A_{3,0} = A_{3,1} = A_{3,2} = 0, \quad A_{3,3} = 1$$

とすれば $n = 0 \sim 3$ に対して、いづれもつぎの漸化式で計算できる。

$$\begin{aligned} A_{n,i} = & - \left\{ 2\beta^3(i-1)(i-2)(i-3)(2i-7) A_{n,i-1} \right. \\ & - (i-2)(i-3)\beta^2 \{ \mu\beta(E-\beta) - 6(i-4)^2 + \delta \} A_{n,i-2} \\ & + (i-3)\beta \{ 2(i-4)(i-5)(2i-9) - (i-4)(2\gamma + 3\mu\beta E - 4\mu\beta^2) + (\gamma - \mu\beta B + \mu\beta^2) \} A_{n,i-3} \\ & + \{ (i-4)(i-5)^2(i-6) - (i-4)(i-5)(\gamma + 3\mu\beta E - 6\mu\beta^2) + (i-4)(\gamma - 2\mu\beta B + 3\mu\beta^2) \\ & - (\delta - \mu\beta B\psi + \mu\beta^2\psi) \} A_{n,i-4} \\ & - \{ (i-5)(i-6)(\mu E - 4\mu\beta) + (i-5)(\mu B - 3\mu\beta) - (\mu B\psi - 2\mu\beta\psi) \} A_{n,i-5} \\ & + \{ (i-6)^2\mu - \mu\psi \} A_{n,i-6} \\ & \left. - \mu B \sum_{j=0}^{i-4} \{ (\beta^3 a_j + 3\beta^2 a_{j-1} + 3\beta a_{j-2} + a_{j-3})(i-j-2)(i-j-3) \} A_{n,i-j-2} \right\} \\ & / i(i-1)(i-2)(i-3)\beta^4 \end{aligned}$$

また、 a_j は $\log(\xi + \beta)$ をベキ級数に展開したときの係数で、 $\log(\xi + \beta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j$ であり、

$a_0 = \log \beta$, $a_j = (-1)^{j+1} / j\beta^j$ ($j \geq 1$) で、 $a_{-3} = a_{-2} = a_{-1} = 0$ とする。

3. 座屈荷重方程式 式(2)を式(8)とともに境界条件式に代入し、積分定数 $g_0 \sim g_3$ の係数行列式を0とおけば座屈荷重方程式が得られる。面曲線辺が固定されている場合は

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i \Delta^{i-1} A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} i (-\Delta)^{i-1} A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i (-\Delta)^{i-1} A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i (-\Delta)^{i-1} A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} i (-\Delta)^{i-1} A_{3,i} \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

となり、両曲線辺が単純支持の場合はずぎのようになる。

$$\left| \begin{array}{cccc} \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} (-\Delta)^i A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\Delta) A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\Delta) A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\Delta) A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(\Delta) A_{3,i} \\ \sum_{i=0}^{\infty} f_i(-\Delta) A_{0,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(-\Delta) A_{1,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(-\Delta) A_{2,i} & \sum_{i=0}^{\infty} f_i(-\Delta) A_{3,i} \end{array} \right| = 0 \quad (10)$$

ただし、 $\Delta = 1 - \beta = (1 - \xi)/2$ 、 $f_i(\xi) = i\xi^{i-1} \{ (i-1)\xi^{-1} + \nu_0/(\xi + \beta) \}$ である。

座屈係数 $k = M/D_0\pi^2$ を考えると $\mu = k(D_0\pi^2/D_rA)$ となるので、式(9)、式(10)のような座屈荷重方程式を満足する座屈係数 k を試索法によって求めればよい。座屈荷重方程式を満足する k のうちうち正の最小値が図-1に示す曲げモーメントに対する座屈係数であり、負の最小値が逆方向の曲げモーメントに対する座屈係数である。

4. 数値計算例 一例としてフランジのない等方性扇形板が両曲線辺で単純支持されている場合について $\rho_w = r_i/r_0 = 0.25$ で、 α の値を種々変えて計算した結果を図-2、図-3に示す。図の破線は半径方向の応力 σ_r を無視し、 σ_θ が直線分布するとした場合の結果である。なお計算には京都大学大型計算機センターのFACOM 230-60および関西大学のFACOM 230-25を使用した。

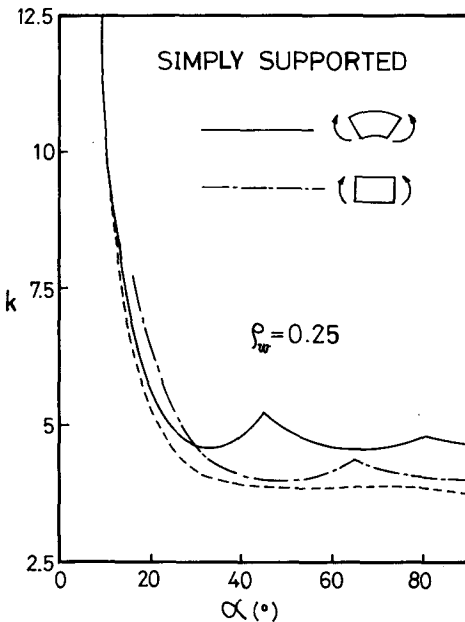


図-2

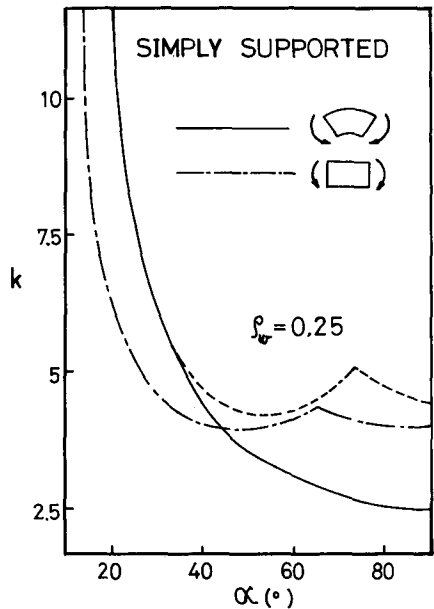


図-3